

文章编号: 1006 - 2106(2011) 07 - 0021 - 07

基于随机响应面法和 Sarma 法的边坡可靠度分析^{*}

蒋水华 李典庆^{**}

(武汉大学, 武汉 430072)

摘要: 研究目的: 提出基于线性无关原则概率配点法的随机响应面法, 并采用于 C# 语言的计算程序 WHUSRSM。将随机响应面法和边坡稳定分析的 Sarma 法相结合, 能够有效地分析极限状态方程为隐式的边坡稳定可靠度问题。

研究结论: 本文采用公路边坡工程算例证明了随机响应面法的有效性, 并与传统响应面法及蒙特卡罗模拟方法的计算结果进行了比较。结果表明, 随机响应面法的计算精度和计算效率均优于传统响应面法, 且计算效率远远高于蒙特卡罗模拟方法。基于线性无关原则的概率配点法求解 Hermite 多项式展开的待定系数时, 不仅可以消除系数矩阵的奇异性问题, 而且大大地提高了计算效率; 潜在滑体的可靠指标随着黏聚力和内摩擦角间负相关性增加而增大, 不考虑这种负相关性得出的结果偏于保守。

关键词: 岩质边坡; Sarma 法; 可靠度; 随机响应面法; 响应面法

中图分类号: U411 **文献标识码:** A

Analysis of Reliability of Slope Stability with Stochastic Response Surface Method and Sarma Method

JIANG Shui - hua , LI Dian - qing

(Wuhan University , Wuhan , Hubei 430072 , China)

Abstract: Research purposes: This paper aims to propose a stochastic response surface method based on the principle of linearly independent collocation and compile a C# - language based on computer program WHUSRSM (Wuhan University Stochastic Response Surface Method) . Using the proposed stochastic response surface method along with the Sarma can effectively evaluate the reliability of slope stability in the implicit limit state.

Research conclusions: In this paper , the analysis of the stability of highway slope is presented to demonstrate the validity of the proposed stochastic response surface method. The results indicate that stochastic response surface method is better than the conventional response surface method in the accuracy and efficiency , and better than Monte Carlo simulation method in the calculation efficiency . The stochastic response surface method based on the principle of linearly independent collocation can not only remove the singularity of coefficient matrix associated with the estimation of coefficients in the Hermite polynomial chaos expansion , but also greatly improve the computational efficiency. The Reliability index of the potential landslide increases with the increases of the negative correlation coefficient between cohesion and friction angle , so the results are somewhat conservative if the negative correlation is not considered.

Key words: rock slope; Sarma method; reliability; stochastic response surface method; response surface method

^{*} 收稿日期: 2011 - 05 - 11

基金项目: 国家自然科学基金项目(51079112; 51028901) ; 教育部新世纪优秀人才项目(NCET - 08 - 0415)

^{**} 作者简介: 蒋水华, 1987 年出生, 男, 在读博士研究生; 李典庆, 1975 年出生, 男, 教授。

1 研究背景

1995 年 美国科学院下属的美国国家科学研究委员会组成了“岩土工程减灾可靠度方法研究委员会”,该委员会提出了“岩土工程中的可靠度方法”的研究报告^[1]。报告指出“对于可靠度方法在岩土工程中作用的问题,委员会的主要发现是:可靠度方法,如果不是把它作为现有传统方法的替代物的话,确实可以为分析岩土工程中包含的不确定性提供系统的、定量的途径^[2]。在工程设计和决策中,采用这一方法来定量地分析这些不确定因素尤为有效。”这一结论充分说明了边坡稳定分析中采用可靠度方法的重要意义。

在边坡可靠度分析中,极限状态方程是建立在边坡安全系数计算的基础上的。而且大多数计算方法如 Sarma 法^[3]、剩余推力法、Morgenstern - Price 法等都没有显式的安全系数计算表达式,传统的 FORM 方法无法求解,可借助于随机有限元法(SFEM)^[4]、蒙特卡罗模拟方法(MCS)或响应面法(RSM)^[5]。然而随机有限元程序开发周期长、数据处理工作量大,而且很难开发一个通用的随机有限元计算程序。蒙特卡罗模拟一般需要进行十万次以上的模拟,其计算量非常大,一般仅作为精确解与其他方法进行比较。为此,有的学者提出了采用响应面法来分析极限状态方程为隐式的可靠度问题,如 Wong^[5]首次将响应面法应用于土质边坡可靠度分析。苏永华等^[6-7]将响应面法和边坡稳定性分析的 Sarma 法及 Janbu 法结合来进行边坡可靠度分析。陈昌富等^[8]将响应面法和 Morgenstern - Price 法结合分析了土质边坡可靠度。Xu 和 Low^[9]又将响应面法与有限元方法及 Spencer 法结合进行了土坝可靠度分析。上述文献采用的响应面函数都是普通二阶多项式,这里称为传统响应面法。传统响应面方法以普通二阶多项式逼近系统的随机响应时,其收敛性得不到保证,而且多项式系数矩阵可能会出现奇异性问题^[10]。此外,由于响应面的形式为普通二阶多项式,分析高阶非线性可靠度问题时计算精度不高,计算效率较低,极限响应面可能会存在两条分支,此时采用 FORM 方法求解可靠指标有可能得到错误的结果^[11]。

本文目的在于提出一种新的边坡可靠度计算方法

随机响应面法(Stochastic Response Surface Method, SRSM),该方法最早由 Isukapalli 等^[12]于 1998 年在研究环境和生物系统的不确定性问题中提出来的。随机响应面法以 Hermite 正交多项式为基底逼近系统的随机响应,目前已在岩土工程可靠度分析中得到了初步应用。如 Huang 等^[10]编写了基于 EXCEL 的随机响应面法计算程序,并探讨了随机响应面法在岩土工程可靠度分析中的应用。为了使随机响应面法能够考虑非正态输入变量间的相关性,李典庆等^[13]采用 Nataf 变

换解决了相关非正态输入变量的配点问题,同时还推导了 4~6 阶 Hermite 随机多项式展开的解析表达式,给出了多达 17 种分布类型的随机变量与标准正态随机变量之间的映射关系。然而文献[10,13]考虑的都是极限状态方程具有显式表达式的简单情况,而且对于配点数目选取也缺乏系统的研究,没有一个定量的标准,这不仅使计算存在一定的随意性,而且计算量也较大。为此,本文提出采用基于线性无关原则选取配点的随机响应面法,并将该方法与常用的边坡稳定性分析的 Sarma 法相结合进行边坡稳定可靠度分析。同时与传统响应面法及蒙特卡罗模拟计算结果进行了比较。最后采用算例证明了所提方法的有效性。

2 基于 Sarma 法的边坡稳定安全系数的计算

2.1 Sarma 法力学模型

岩质边坡稳定性分析的 Sarma 法^[3]是 Sarma 于 1979 年提出的一种基于极限平衡理论的边坡稳定性分析方法,该方法最初用于水库大坝坝体的稳定性计算。与传统的极限平衡分析方法相比,Sarma 法有以下优点:可以分析具有复杂结构面的圆弧或非圆弧滑动的边坡稳定性问题;假设滑面和临空面之间的滑体分为 n 块,不要求各条块是垂直的;平衡方程中考虑了滑体本身的强度;平衡方程及其数值解的假设条件较少,数学推导十分严密,不仅考虑了边坡的非齐次边界条件,而且考虑了坡面荷载和加固力情况下边坡的稳定性问题。

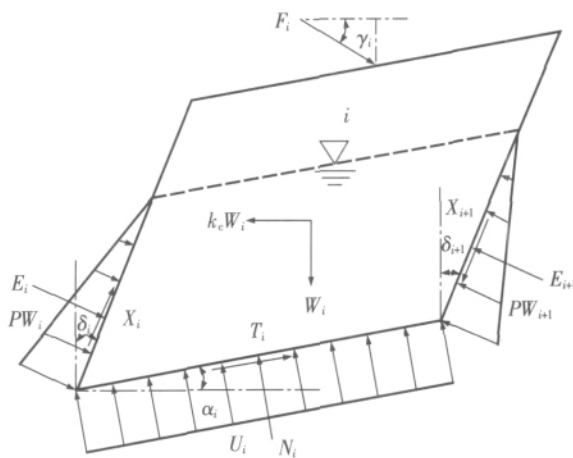


图 1 Sarma 法稳定性分析受力模型

Sarma 法条块受力分析模型如图 1 所示,条块划分可以根据岩土体性质和实际界面采用竖直或倾斜界面。图中: F_i 为第 i 条块坡面锚索或锚杆等施加给条块的力和其它坡面荷载; γ_i 为第 i 条块坡面荷载与水平面的夹角; W_i 为第 i 条块的自重; k_c 为临界水平地震加速度系数; E_i 、 E_{i+1} 为作用在第 i 条块两侧面的正

压力; X_i 、 X_{i+1} 为作用在第 i 条块两侧面的剪切力; N_i 为作用在第 i 条块底滑面的正压力; T_i 为作用在第 i 条块底滑面的剪切力; U_i 为作用在第 i 条块底滑面上的静水压力, kN; PW_i 、 PW_{i+1} 为作用在第 i 条块两侧静水压力; α_i 为第 i 条块底滑面与水平面的夹角; δ_i 、 δ_{i+1} 为第 i 条块两侧面与铅直面的夹角; c_{Bi} 、 ϕ_{Bi} 分别为第 i 条块底滑面的黏聚力和内摩擦角, c_{Si} 、 ϕ_{Si} 分别为第 i 条块侧滑面的黏聚力和内摩擦角。

2.2 安全系数 F_s 与 k_c 的关系

假设在临界水平地震加速度系数 k_c 下的安全系数为 F_s , 根据极限平衡分析原理采用如下形式的强度折减:

$$c'_{Bi} = \frac{c_{Bi}}{F_s}, \phi'_{Bi} = \frac{\phi_{Bi}}{F_s}, c'_{Si} = \frac{c_{Si}}{F_s}, \phi'_{Si} = \frac{\phi_{Si}}{F_s} \quad (1)$$

对于每一条块, 建立水平和垂直方向力的平衡方程可得:

$$N_i \cos \alpha_i + T_i \sin \alpha_i = W_i + X_{i+1} \cos \delta_{i+1} - X_i \cos \delta_i - E_{i+1} \sin \delta_{i+1} + E_i \sin \delta_i + F_i \sin \gamma_i \quad (2)$$

$$T_i \cos \alpha_i - N_i \sin \alpha_i = k_c W_i + X_{i+1} \sin \delta_{i+1} - X_i \sin \delta_i + E_{i+1} \cos \delta_{i+1} - E_i \cos \delta_i - F_i \cos \gamma_i \quad (3)$$

假设当条块底滑面达到极限平衡状态时, 条块侧面也同时达到极限平衡状态, 即满足摩尔-库仑强度准则, 在条块底滑面和左右侧面有:

$$T_i = (N_i - U_i) \tan \phi'_{Bi} + c'_{Bi} b_i \sec \alpha_i \quad (4)$$

$$X_i = (E_i - PW_i) \tan \phi'_{Si} + c'_{Si} d_i \quad (5)$$

$$X_{i+1} = (E_{i+1} - PW_{i+1}) \tan \phi'_{Si+1} + c'_{Si+1} d_{i+1} \quad (6)$$

将式(4)~(6)代入式(2)和式(3), 消去 T_i 、 X_i 、 X_{i+1} 和 N_i , 得到 E_i 的递推关系式:

$$E_{i+1} = a_i - p_i k_c + E_i e_i \quad (7)$$

将逐个条块($i=1, 2, \dots, n$)代入递推公式(7)展开得:

$$\begin{cases} E_{n+1} = a_n - p_n k_n + E_n e_n \\ E_{n+1} = (a_n + a_{n-1} e_n) - (p_n + p_{n-1} e_n) k_c + e_{n-1} e_n e_{n-1} \\ \dots \\ E_{n+1} = \left(a_n + a_{n-1} e_n + \dots \right) - \left(p_n + p_{n-1} e_n + \dots \right) k_c + E_1 e_n e_{n-1} \dots e_1 \end{cases} \quad (8)$$

利用非齐次边界条件: $E_1 = E_Q$, $E_{n+1} = \gamma_w Z_w^2 / 2$

式中 E_Q ——边坡前缘支护力;

Z_w ——后缘拉裂缝充水深度;

γ_w ——水的容重。可得:

$$k_c = \frac{a_n + e_n a_{n-1} + \dots + e_n e_{n-1} \dots e_2 a_1 + E_1 e_n e_{n-1} \dots e_1 - E_{n+1}}{p_n + e_n p_{n-1} + \dots + e_n e_{n-1} \dots e_2 p_1}$$

式中

$$a_i = \frac{W_i \sin(\phi'_{Bi} - \alpha_i) + R_i \cos \phi'_{Bi} + S_{i+1} \sin(\phi'_{Bi} - \alpha_i + \delta_{i+1})}{\cos(\phi'_{Si+1} - \alpha_i - \delta_{i+1} + \phi'_{Si}) \sec \phi'_{Si+1}} - \frac{S_i \sin(\phi'_{Bi} - \alpha_i - \delta_i) + F_i \cos(\phi'_{Bi} - \gamma_i - \alpha_i)}{\cos(\phi'_{Si+1} - \alpha_i - \delta_{i+1} + \phi'_{Si}) \sec \phi'_{Si+1}} \quad (9)$$

$$P_i = \frac{W_i \cos(\phi'_{Bi} - \alpha_i)}{\cos(\phi'_{Si+1} - \alpha_i - \delta_{i+1} + \phi'_{Si}) \sec \phi'_{Si+1}} \quad (10)$$

$$e_i = \frac{\cos(\phi'_{Si} - \alpha_i - \delta_i + \phi'_{Bi}) \sec \phi'_{Si}}{\cos(\phi'_{Si+1} - \alpha_i - \delta_{i+1} + \phi'_{Bi}) \sec \phi'_{Si+1}} \quad (11)$$

$$R_i = c'_{Bi} b_i \sec \alpha - U_i \tan \phi'_{Bi} \quad (12)$$

$$S_i = c'_{Si} d_i - PW_i \tan \phi'_{Si} \quad (13)$$

式中 d_i 、 d_{i+1} ——第 i 条块左右侧面的长度;

b_i ——边坡第 i 条块底滑面在水平面上的投影长度。

计算出边坡安全系数之后, 可以建立边坡稳定性分析的功能函数 g 为:

$$g(X) = F_s - 1 \quad (14)$$

式中 X ——与安全系数计算有关的随机变量。

由上述 Sarma 法安全系数计算公式知, F_s 不能表示为 c_{Bi} 、 ϕ_{Bi} 、 c_{Si} 、 ϕ_{Si} ($i=1, 2, \dots, n$) 及 k_c 的显式函数关系, 只能表示为 $F_s = f(c_{Bi}, \phi_{Bi}, c_{Si}, \phi_{Si}, k_c, F_s)$ 的形式。此时, 传统的 FORM 方法无法求解式(15)所示功能函数的可靠度, 为此这里引入随机响应面法来求解上述问题的可靠度。

3 随机响应面法

文献[13]给出了随机响应面法详细的计算过程, 这里简要介绍其基本步骤。对于任意分布类型的随机变量 X 来说, 随机响应面法首先建立输入随机变量 X 和标准正态分布随机变量 U 映射关系式, 即:

$$X = F^{-1}[\Phi(U)] \quad (15)$$

式中 $F^{-1}(\cdot)$ ——变量 X 的累积分布函数的反函数;

$\Phi(\cdot)$ ——标准正态分布变量的累积分布函数;

U ——标准正态随机变量。

文献[13]给出了17种分布变量与标准正态随机变量间的映射关系式, 输入随机变量的个数取决于所分析问题的性质, 为了减少计算量, 通常选择最敏感的随机变量作为输入随机变量。

在此基础上, 把输出响应也表示为标准正态随机变量的函数。输出响应量 Y 通常采用如下的 Hermite 随机多项式展开来表示^[13-14]。

$$Y = a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_1(U_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(U_{i_1}, U_{i_2}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \sum_{i_3=1}^{\infty} a_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(U_{i_1}, U_{i_2}, U_{i_3}) + \dots$$

$$\sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Gamma_4(U_{i_1}, U_{i_2}, U_{i_3}, U_{i_4}) + \dots$$

$$\sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \dots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} a_{i_1 i_2 \dots i_n} \Gamma_n(U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}) \quad (17)$$

式中 $a_0, a_{i_1}, a_{i_1 i_2}, \dots$ ——待定系数;

$U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ ——标准正态随机变量;

n ——标准正态随机变量的个数;

$\Gamma_n(U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n})$ —— n 阶 Hermite 多项式, 其计算公式如下:

$$\Gamma_n(U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n})$$

$$= (-1)^n e^{\frac{1}{2}U^T U} \frac{\partial^n}{\partial U_{i_1} \partial U_{i_2} \dots \partial U_{i_n}} e^{-\frac{1}{2}U^T U} \quad (18)$$

根据式(17)可得输出随机响应在随机变量个数为 M 时 p 阶 Hermite 随机多项式展开的项数(待定系数的个数) N_a 的计算公式为^[14]:

$$N_a = \frac{(M+p)!}{M! p!} \quad (19)$$

为了求解上述随机多项式的待定系数,常用的方法是概率配点法^[15],一般来说 p 阶随机多项式的配点是通过 $p+1$ 阶一维 Hermite 多项式根的组合作来确定,如 2 阶随机多项式的配点为 3 阶 Hermite 多项式 $H_3 = U^3 - 3U$ 的根 $(0, \pm\sqrt{3})$ 的组合,3 阶随机多项式的配点为 $H_4 = U^4 - 6U^2 + 3$ 的根 $\pm\sqrt{3 \pm \sqrt{6}}$ 的组合。此外,在布置配点时应尽量关于原点对称。对于标准正态随机变量来说,在原点处的概率密度最大,因此 4 阶 Hermite 多项式还需补充一个 0 根,这样共有 5 个根。同样对于 6 阶 Hermite 多项式也需补充一个 0 根,共有 7 个根。也就是说,对于偶数阶 Hermite 多项式要补充一个 0 根。按照上述方法进行根的组合作可得可供选择的配点数目 N_c 为:

$$N_c = (p+1)^M \quad (20)$$

一般来说 $N_c \gg N_a$,因此我们选取的配点数只是可供选择配点数 N_c 中的一部分。选取配点的原则是优先选择高概率区域内的点^[15],而且在布置配点时应尽量关于原点对称。选取配点的数目一般要多于待定系数的个数才可消除待定系数矩阵的奇异性,Isukapalli 等^[12]建议配点数目取为待定系数的 2 倍,这样可以平衡每个配点的影响。然而上述准则在很多时候仍然得不到理想的结果。为此,本文采用基于 Hermite 系数矩阵依行向量组线性无关的原则来选取配点,这样所选配点个数恰好等于待定系数个数,也无需采用基于最小二乘法的回归方法求解待定系数,从而极大地减少了确定性计算程序的调用次数,这里是减少了安全系数迭代求解的次数。求解线性方程组时,基于系数矩阵线性无关原则系数矩阵行列式的值

恒不等于零,避免了系数矩阵奇异性和方程组病态等问题。对于需要调用复杂有限元计算程序进行随机分析,这计算量的减少更为显著。对于指定的随机变量个数和随机多项式的阶数,可预先将所需的配点搜索到并保存,下一次计算时直接调用,可以节省计算时搜索配点的时间。

当随机多项式中待定系数确定后,也就确定了近似的安全系数的显式表达式,可得边坡可靠度分析的极限状态方程为:

$$g(U) = F_s - 1 = a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_1(U_{i_1}) +$$

$$\sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(U_{i_1}, U_{i_2}) +$$

$$\sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(U_{i_1}, U_{i_2}, U_{i_3}) + \dots$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \dots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} a_{i_1 i_2 \dots i_n} \Gamma_n(U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}) - 1 = 0 \quad (21)$$

对于式(21)所示的显式表达式可靠度计算问题,可以选用的方法很多,如 MCS 方法、FORM 方法等。可得边坡稳定可靠指标 β 及相应的失效概率 $p_f = \Phi(-\beta)$ 。

4 算例

某一滑坡位于南充市嘉陵区大通镇境内^[16],在龙潭沟北坡新建成南高速公路的 K 172+440~K 172+620 左侧,前缘与成南高速公路相接。滑坡典型断面图见文献[16],取 K 172+520 主滑方向(170°)的剖面为计算剖面图,滑动面为弧线形,潜在滑体形状和条分情况如图 2 所示。计算时分为 5 段,Ⅰ段滑坡倾角 $\alpha_1 = 76^\circ$,滑面长度 $L_1 = 10.5$ m,平均厚度 $H_1 = 5.0$ m;Ⅱ段滑坡倾角 $\alpha_2 = 45^\circ$,滑面长度 $L_2 = 14.0$ m,平均厚度 $H_2 = 11.5$ m;Ⅲ段滑坡倾角 $\alpha_3 = 22^\circ$,滑面长度 $L_3 = 12.0$ m,平均厚度 $H_3 = 10.3$ m;Ⅳ段滑坡倾角 $\alpha_4 = -7^\circ$,滑面长度 $L_4 = 9.0$ m,平均厚度 $H_4 = 6.3$ m;Ⅴ段滑坡倾角 $\alpha_5 = -7^\circ$,滑面长度 $L_5 = 6.5$ m,平均厚度 $H_5 = 1.0$ m。

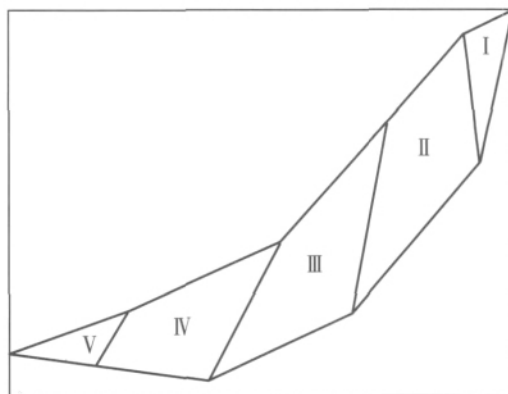


图2 潜在滑体条分图

边坡稳定计算中采用的参数如下: 各土层天然容重 $\gamma = 26.6 \text{ kN/m}^3$, 水的容重 $\gamma_w = 10.0 \text{ kN/m}^3$ 。滑面的黏聚力和内摩擦角分别为 c_1 和 ϕ_1 , 块体间接触面的黏聚力和内摩擦角分别为 c_2 和 ϕ_2 , 黏聚力和内摩擦角均视为随机变量 , 其统计参数如表 1 所示。考虑以下三种工况的边坡稳定可靠度: 天然工况(不考虑降雨和地震影响) 、降雨工况(按地下水充水高度为潜在滑动体高度的 30% 考虑) 、地震工况(地震烈度为 VII 度 , 水平地震加速度为 $0.1g$) 。众所周知 , 黏聚力和内摩擦角间存在负相关性 , 为了分析方便 , 这里假定 $\rho_{c_1 \phi_1} = \rho_{c_2 \phi_2} = 0$ 。

表 1 基本变量的统计参数			
随机变量	分布类型	均值	标准差
c_1 (kN/m^2)	对数正态	29	5.8
ϕ_1 ($^\circ$)	正态	9.9	1.782
c_2 (kN/m^2)	对数正态	60	10.8
ϕ_2 ($^\circ$)	正态	11.5	1.725

本文采用基于 C# 语言的边坡可靠度分析的随机响应面法计算程序 WHUSRSM , 计算了不同相关系数情况下上述 3 种工况下的边坡稳定可靠指标 , 结果如图 3 ~ 图 5 所示 , 图中括号内为安全系数迭代求解的次数。为了比较 , 还计算了传统响应面法 (RSM) 和 50 万次蒙特卡罗模拟 (MCS) 的可靠指标。由图 3 可以看出 , 当相关系数 $\rho_{c_1 \phi_1} = \rho_{c_2 \phi_2} = 0$ 时 , SRSM 只需要进行 15 次安全系数迭代计算 , 可靠指标为 1.749 , 而 RSM 需要进行 41 次安全系数迭代计算 , 可靠指标为 1.680 , 将 50 万次 MCS 可靠指标为 1.750 视为精确解 , 可得 SRSM 和 RSM 的相对误差分别为 0.03% 和 3.99% 。此外 , 随着变量间负相关性的增加 , SRSM 和 RSM 的误差都在增大。如当 $\rho_{c_1 \phi_1} = \rho_{c_2 \phi_2} = -0.8$ 时 , SRSM、RSM、MCS 的可靠指标分别为 3.067、2.836、2.969 , SRSM 和 RSM 的相对误差分别为 3.34% 和 4.47% 。同理 , 由图 4 降雨工况下可以看出 , 当相关系数从 0 变化到 -0.95 时 , SRSM 结果和 MCS 结果保持了较好的一致性 , 其计算精度明显高于 RSM 计算精度。如当 $\rho_{c_1 \phi_1} = \rho_{c_2 \phi_2} = 0$ 时 , 由图 4 可得 SRSM、RSM、MCS 的可靠指标分别为 1.146、1.083、1.152 , SRSM 和 RSM 的相对误差分别为 0.46% 和 5.97% ; 当 $\rho_{c_1 \phi_1} = \rho_{c_2 \phi_2} = -0.95$ 时 , SRSM、RSM、MCS 的可靠指标分别为 2.030、1.891、2.005 , SRSM 和 RSM 的相对误差分别为 1.2% 和 5.7% 。如图 5 在地震工况下 , SRSM 结果也与 MCS 结果保持了高度一致性 , 而 RSM 结果存在较大的误差。如当 $\rho_{c_1 \phi_1} = \rho_{c_2 \phi_2} = 0$, SRSM、RSM、MCS 可靠指标分别为 0.250、0.176、0.249 , 此时 SRSM、RSM 的相对

误差分别为 0.1% 和 29.4% ; 当 $\rho_{c_1 \phi_1} = \rho_{c_2 \phi_2} = -0.95$ 时 , SRSM 和 RSM 的相对误差分别为 1.8% 和 29.2% 。因此 , 无论是在计算精度还是计算效率方面 , 随机响应面法均优于传统响应面法。此外值得注意的是在地震工况时 , 不管是否考虑黏聚力和内摩擦角间相关性 , 边坡失稳概率都大于 30% , 因此必须采取锚固支护措施来提高边坡的稳定性。

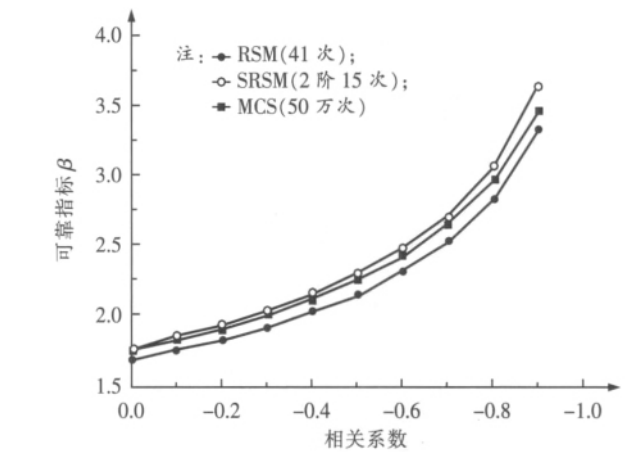


图 3 天然工况下边坡可靠指标的比较

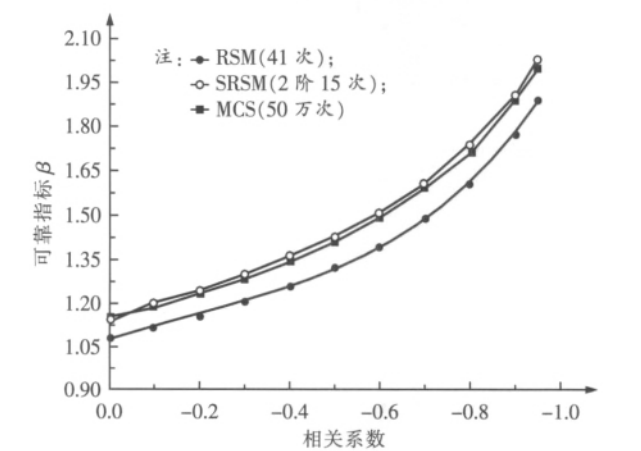


图 4 降雨工况下边坡可靠指标的比较

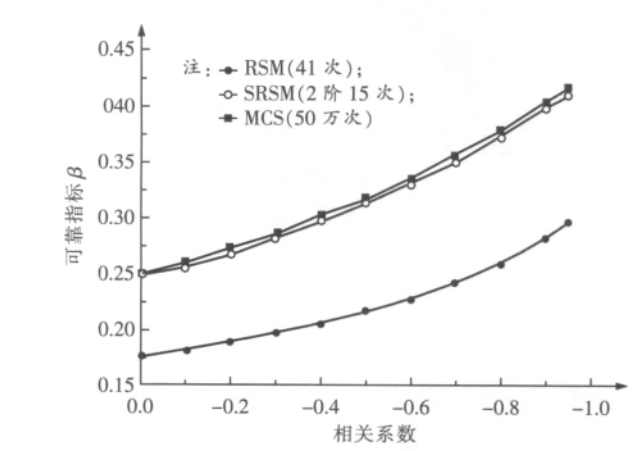


图 5 地震工况下边坡可靠指标的比较

表 2 三种方法计算结果的比较

	天然工况下			降雨工况下			地震工况下		
	SRSM	RSM	MCS	SRSM	RSM	MCS	SRSM	RSM	MCS
均值	1.224	1.222	1.224	1.148	1.146	1.148	1.036	1.035	1.036
标准差	0.112	0.111	0.112	0.111	0.110	0.112	0.096	0.097	0.097
变异系数	0.091	0.090	0.092	0.097	0.096	0.098	0.093	0.093	0.094
偏度	0.436	0.379	0.413	0.492	0.429	0.473	0.464	0.400	0.437
峰度	3.365	3.339	3.397	3.414	3.396	3.468	3.408	3.365	3.451
失效概率	0.011	0.016	0.012	0.077	0.093	0.079	0.377	0.415	0.376
可靠指标	2.300	2.151	2.249	1.427	1.324	1.415	0.314	0.216	0.317
$ \beta - \beta_{MCS} /\beta_{MCS} \times 100\%$	2.264	4.358	0	0.853	6.448	0	1.102	31.876	0

为了进一步比较随机响应面法和传统响应面法，表 2 给出了 $\rho_{c_1 \phi_1} = \rho_{c_2 \phi_2} = -0.5$ 时三种方法的计算结果，表中给出的是安全系数的统计参数。可以看出，无论是安全系数的均值、标准差、变异系数、偏度、峰

度，还是失效概率及可靠指标，SRSM 的计算结果和 MCS 结果保持了较好的一致性，其计算精度均优于传统的响应面法，这充分说明了随机响应面法的优越性。

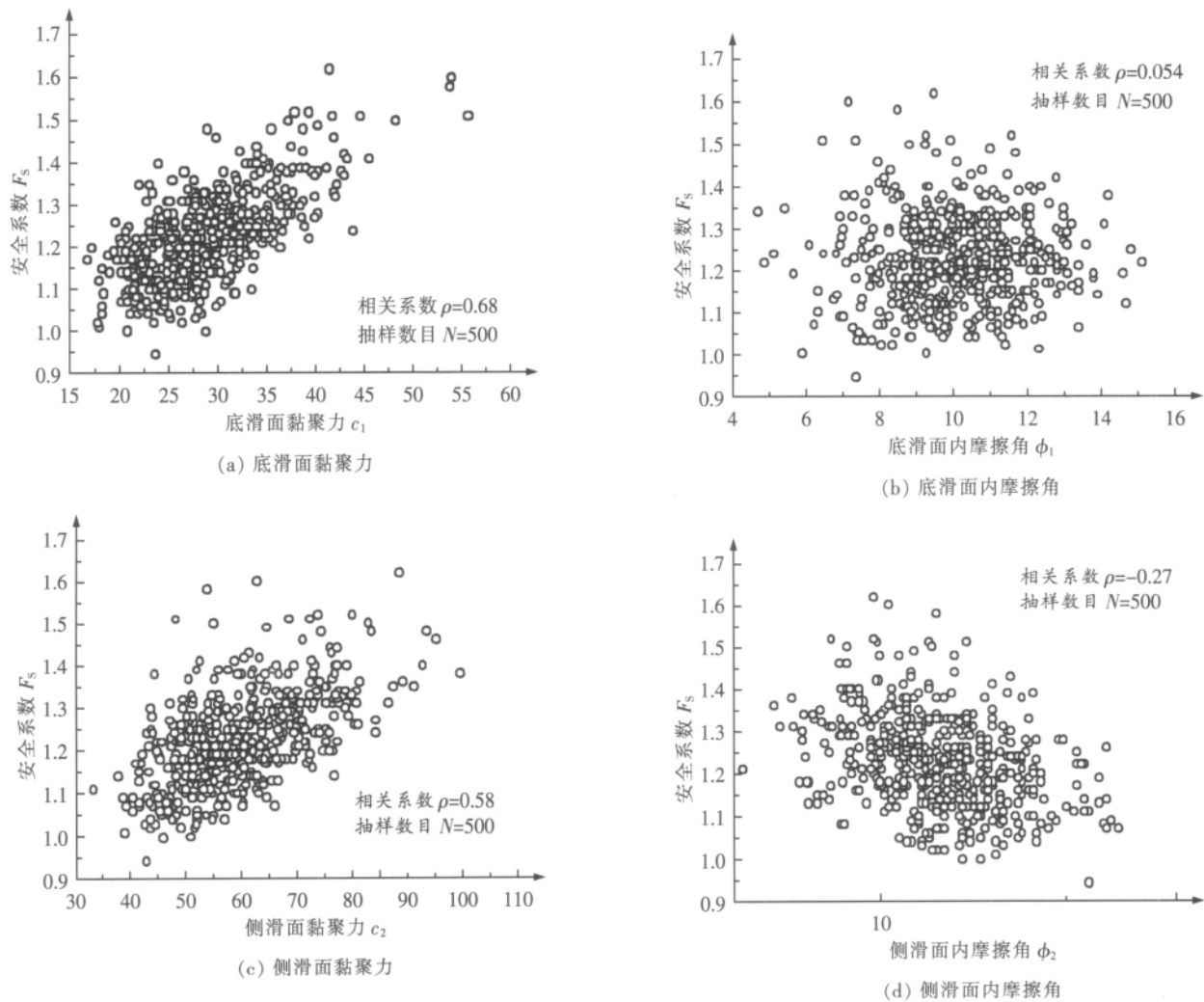


图 6 安全系数和输入变量间的相关性

随机响应面法除了可以方便地计算输出响应量的统计参数外，它还可以计算输出响应量和输入随机变量间的相关性。图 6 给出了安全系数与黏聚力及内摩擦角间的相关关系，这里只计算了天然工况下 500 个样本点的结果。可以看出，边坡安全系数与黏聚力存在明显的正相关关系，与底滑面的内摩擦角存在较弱的正相关关系，与边坡侧滑面的内摩擦角存在负相关关系。安全系数与底滑面及侧滑面黏聚力间相关系数

分别为 0.68 和 0.58, 因此, 黏聚力对边坡稳定性具有非常明显的影响, 相比之下, 内摩擦角的影响较小。

5 结论

(1) 随机响应面法与边坡稳定分析的 Sarma 法相结合能够有效地进行边坡稳定可靠度分析。Sarma 法计算的边坡安全系数不仅不能表示为基本随机变量的显式表达式, 而且还是非线性函数关系。随机响应面法在计算可靠指标过程中无需求功能函数对随机变量的偏导数, 从而避免了采用一阶泰勒展开近似非线性功能函数带来的误差, 这是传统的 FORM 方法无法比拟的。该方法对于功能函数为复杂隐式和非线性的边坡稳定可靠度问题来说, 体现出了明显的优越性。

(2) 提出采用基于线性无关原则的配点选取方法, 选取的配点数目等于随机多项式中待定系数的个数, 这与 Isukapalli 等建议配点数目为待定系数的 2 倍相比, 本文方法极大地减少了确定性计算程序的调用次数, 从而大大提高了随机响应面法的计算效率。

(3) 无论输入随机变量是独立还是相关, 随机响应面法计算结果都和蒙特卡罗模拟的结果保持了较好的一致性, 其计算精度明显高于传统响应面法, 而且计算效率也优于传统响应面法。因此, 随机响应面法是传统响应面法一种较好的改进计算方法。值得注意的是, 随着变量间相关性的增加, 随机响应面法的误差逐渐增大, 此时采用更高阶次的随机响应面法可以减小误差, 但是计算量会相应地增加。

(4) 算例分析结果表明该边坡在天然工况稳定性较好, 与实际工程相吻合。但是在Ⅶ度地震时边坡失效概率很大, 边坡稳定性较差, 需采取锚固支护措施来确保边坡稳定性。此外, 随着黏聚力和内摩擦角间负相关性增加, 三种工况下潜在滑体的可靠指标均逐渐增大。不考虑这种负相关性得出的结果偏于保守。

(5) 当输入随机变量个数较多且随机多项式展开阶数较高时, 如随机变量数目大于 10, 同时随机多项式展开阶数高于 4 阶, 通过基于随机多项式系数矩阵线性无关原则寻找数目与待定系数个数相等的配点的过程十分耗时, 有时甚至会超过直接采用蒙特卡罗模拟的时间, 但是对于四阶以内的随机多项式, 所提方法具有明显的优势。

参考文献:

[1] Committee on Reliability Methods for Risk Mitigation in Geotechnical Engineering. Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering [R]. National Research Council, National Academy Press, Washington D. C.,

1995.

- [2] 贺刚, 蒋楚生. 边坡岩土工程不确定性及对策分析 [J]. 铁道工程学报, 2010(4): 19-22.
- He Gang, Jiang Chusheng. Analysis of Uncertainty of Slope Rock - soil Engineering and Countermeasure [J]. Chinese Journal of Railway Engineering Society, 2010(4): 19-22.
- [3] Sarma S K. Stability Analysis of Embankments and Slopes [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1979(12): 1511-1524.
- [4] Haldar A., and Mahadevan S. Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis [M]. John Wiley and Sons, New York, 2000.
- [5] Wong F S. Slope Reliability and Response Surface Method [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1995(1): 32-53.
- [6] 苏永华, 赵明华, 邹志鹏, 等. 边坡稳定性分析的 Sarma 模式及其可靠度计算方法 [J]. 水利学报, 2006(4): 457-463.
- Su Yonghua, Zhao Minghua, Zhou Zhipeng, etc. Sarma Model for Slope Stability Analysis and Its Reliability Degree Calculation Method [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2006(4): 457-463.
- [7] 苏永华, 赵明华, 蒋德松, 等. 响应面方法在边坡稳定可靠度分析中的应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 2006(7): 1417-1424.
- Su Yonghua, Zhao Minghua, Jiang Desong, etc. Application of Response Surface Method to Reliability Analysis of Slope Stability [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Rock Engineering, 2006(7): 1417-1424.
- [8] 陈昌富, 朱剑锋, 龚晓南. 基于响应面法和 Morgenstern - Price 法土坡可靠度计算方法 [J]. 工程力学, 2008(10): 166-172.
- Chen Changfu, Zhu Jianfeng, Gong Xiaonan. Calculation Method of Earth Slope Reliability Based on Response Surface Method and Morgenstern - Price Procedure [J]. Engineering Mechanics, 2008(10): 166-172.
- [9] Xu B, Low B K. Probabilistic Stability Analyses of Embankments Based on Finite Element Method [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2006(11): 1444-1454.
- [10] Huang S P, Liang B, Phoon K K. Geotechnical Probabilistic Analysis by Collocation - based Stochastic Response Surface Method - An EXCEL Add - in Implementation [J]. Georisk 2009(2): 75-86.

(下转第 33 页)

- Pile - slab Structure Subgrade of Ballastless Track [C]//Proceeding of Communication Meeting on Technology of Railway Passenger Dedicated Line. Wuhan: Changjiang Press ,2005.
- [2] 詹永祥, 蒋关鲁. 桩板结构路基动力模型试验研究[J]. 岩土力学, 2008(8): 2097 - 2101 2110.
Zhan Yongxiang , Jiang Guanlu. Model Experimental Research on Dynamic Performance of Pile - plank Embankment [J]. Rock and Soil M mechanics , 2008 (8): 2097 - 2101 2110.
- [3] 赵国堂. 提高轨道临界速度应作为客运专线设计工作的重要目标[J]. 中国铁路, 2005(1): 40 - 42.
Zhao Guotang. Improving Critical Velocity of Track Should Be Served As an Important Target for the Design of Passenger Special Line [J]. Chinese Railways , 2005(1): 40 - 42.
- [4] R. F. Woldringh ,B. M. New. Embankment design for high speed trains on soft soils conception de remblais sur sols meubles pour les chemins de fer à grande vitesse. Geotechnical Engineering for Transportation Infrastructure , Barends et al. (eds) © 1999 Balkema , Rotterdam.
- [5] Pekka Toivola , Anttoni Vesterinen. Real Time Safety and Structural Stability Monitoring of A Reconstructed Concrete Slab Railway Embankment on a Soft Ground after Its Collapse. Symposium " Keep Concrete Attractive" , Budapest 2005: 1 - 6.
- [6] Hans Bachmann , Winfried mohr , Fh martin Kowalski. The Rheda2000 Ballastless Track System [J]. European Railway Review 2003(1) 44 - 50.
- [7] 王忠文, 徐鹤寿. 德国纽伦堡 - 英格尔施塔特新建线的无砟轨道[J]. 中国铁路, 2006(6): 21 - 24.
Wang Zhongwen , Xu Heshou. Ballastless Track of Newly - built Line from Nuremberg to Ingolstadt in Germany [J]. Chinese Railways 2006(6): 21 - 24.
- [8] 詹永祥, 蒋关鲁. 武广线高边坡陡坡地段桩板结构路基的设计理论探讨[J]. 铁道工程学报, 2007(S1): 94 - 96.
Zhan Yongxiang , Jiang Guanglu. Theoretical Exploration on Design of Pile - plate Structure Subgrade in Steep Slope Section of High Side Slope on Wuchang - Guangzhou Railway Passenger Dedicated Line [J]. Journal of Railway Engineering Society 2007(S1): 94 - 96.
- [9] 李绍文. 遂渝铁路无砟轨道试验段路基综合施工技术[J]. 铁道建筑技术, 2007(1): 6 - 9.
Li Shaowen. Comprehensive Construction Technology of Embankment in the Ballastless Track Test Section for Sui - Yu Railway [J]. Railway Construction Technology 2007(1): 6 - 9.
- [10] 肖宏, 郭丽娜. 桩板结构技术应用研究[J]. 铁道标准设计, 2010(2): 47 - 50.
Xiao Hong , Guo Lina. Study on the Application of Pile - slab Structure Technology [J]. Railway Standard Design 2010(2): 47 - 50.

(上接第 27 页)

- [11] 谭晓慧, 王建国, 刘新荣. 改进的响应面法及其在可靠度分析中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2005(增 2): 5874 - 5879.
Tan Xiaohui , Wang Jianguo , Liu Xinrong. Improved Response Surface Method and Its Application to Reliability Analysis [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering , 2005(S2): 5874 - 5879.
- [12] Isulapalli S S , Roy A , Georgopoulos P G. Stochastic Response Surface Methods for Uncertainty Propagation: Application to Environmental and Biological Systems [J]. Risk Analysis , 1998(3): 351 - 363.
- [13] 李典庆, 周创兵, 陈益峰, 等. 边坡可靠度分析的随机响应面法及程序实现[J]. 岩石力学与工程学报, 2010 (8): 1 - 11.
Li Dianqingqing , Zhou Chuangbing , Chen Yifeng , etc. Reliability Analysis of Slope Stability Using Stochastic Response Surface Method and Code Validation [J]. 2010(8): 1 - 11.
- [14] Ghanem R G , Spanos P D. Stochastic Finite Element: a Spectral Approach [M]. Revised Version , Dover Publication , Inc , Mineola , New York , 2003.
- [15] Huang S P , Mahadevan S , Rebba R. Collocation - based Stochastic Finite Element Analysis for Random Field Problems [J]. Probabilistic Engineering Mechanics , 2007(2): 194 - 205.
- [16] 崔猛. 基于 Sarma 法的滑坡体稳定分析[J]. 兰州交通大学学报, 2009(3): 17 - 21.
Cui Meng. Aalysis of Stability of Landslide Body Based on Sarma Computation Method [J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University 2009(3): 17 - 21.