

文章编号:1006—2106(2005)03—0072—03

略述应用于塑性岩(软岩)中的卡斯特纳与芬纳两公式之异同

符华兴*

(中铁五局集团有限公司,贵州 贵阳 550003)

摘要:本文阐述了在塑性岩(软岩)中应用较为广泛的卡斯特纳与芬纳公式(以下简称为两纳公式)在表达形式上的互异以及内容结果上的全同,还说明了其在应用上有所差异。用应力圆作为媒体与变换手段推导了它们相同之处;用实例说明了它们在不同应用上的不同之处。有助于难点工程的理论指导与应用。

关键词:卡斯特纳公式;芬纳公式

中图分类号:U451 **文献标识码:**A

1 两公式的基本知识

$$\text{卡斯特纳公式: } R_p = \gamma_a \left[\frac{2}{K_p + 1} \cdot \frac{P(K_p - 1) + R_c}{R_c} \right]^{1/(K_p - 1)} \quad (1)$$

$$\text{芬纳公式: } R_p = \gamma_a \left[\frac{P + C \cdot \cos \phi (1 - \sin \phi)}{C \cdot \cos \phi} \right]^{1/(K_p - 1)} \quad (2)$$

$$\text{塑性系数: } K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (3)$$

$$K_p + 1 = \frac{2}{1 - \sin \phi} \quad (4)$$

$$K_p - 1 = \frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (5)$$

式中 R_p ——塑性半径;

γ_a ——开挖圆半径;

P ——原始竖向地应力;

R_c ——围岩极限压强;

ϕ ——围岩内摩擦角;

C ——围岩粘聚力(内聚力)

由库伦准则又有:

$$\text{主动侧压系数 } K_a = \tan^2(45^\circ - \phi/2) = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \quad (6)$$

$$\text{被动侧压系数 } K_p = \tan^2(45^\circ + \phi/2) = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (7)$$

2 塑性岩隧道的工程实践

随着西部开发,我国在西部已经建设的铁路工程中遇到了两座塑性岩隧道。其一是南昆线的煤系地层家竹箐隧道,其二是兰新线上技术改造中有断层带的乌鞘岭隧道。两座隧道的共同点都表现为高地应力、强挤压、大变形。由于缺乏起码的技术认识,因而造成了大返工,大浪费。尤其是乌鞘岭隧道,在同一单位异地施工的情况下,又重蹈家竹箐隧道的覆辙,只强调了某一方面而忽视了主要的塑性岩方面,致使其中的167 m 挤坏返工,损失惨重。下面就强挤压、高地应力、大变形的隧道施工谈一点个人的认识,借同行参考。

塑性岩地下洞室修建是难点工程。目前在破解这类难题方面当首推卡斯特纳公式和芬纳公式。不管其他方面怎样理解,但我认为通过家竹箐隧道的施工与使用有限元法的对比与印证,证明公式的可用性与适用性,因此认为两纳公式是塑性岩洞室的理论基础。应该大力宣传、提倡、灵活地应用、深入地理解它们。

3 关于两纳公式的分析

3.1 两纳公式的分析

由基本知识中所表示的(1)式和(2)式可看出:两

纳公式(简称卡斯特纳公式和芬纳公式为两纳公式)同样是用来计算塑性半径,但在方括内的表达形式却不同。在(1)式即卡氏公式中出现围岩极限压强 R_c 、竖向地应力 P 和塑性系数 K_p ;在(2)式即芬纳公式出现的却是粘结力(内聚力) C 和内摩擦角 ϕ 。两者在形式上表现了异象。但通过莫尔强度理论对其内涵进行转换和推导,可证明两者的结果是完全一致的。以下就来做这方面的工作。

显然,欲证明两纳公式相等,首先必须弄清 C 、 R_c 、 ϕ 三者之间的关系。而在塑性区内莫尔强度理论能说明其关系。因为莫尔强度理论的精粹在于表明塑性区内任一点的应力状态是通过该点的应力圆必须与其强度包络线相切(设为直线型)。现作极限压强 R_c 的应力圆 O 如下(O_2 表示塑性区内另一点的应力圆,其最大主应力 σ_1 表示塑性区内切向应力 σ_θ , 最小主应力 σ_3 表示塑性区内径向应力 σ_r)。根据库伦对直线型包络线的改进意见,用下述公式表示出强度包络线关系:

$$\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \phi$$

在原点, $\sigma = 0, \tau = C$, 即得到包络线在纵轴的切距为 C , 原点右侧表示受压, 左侧表示受拉。因为 R_c 是极限抗压强度, 则此极限状态下的应力圆 O_1 与包络线相切于 M 点(特别的还与竖轴 τ 相切于原点), 即表示在 R_c 力状态下, 岩石发生破坏。

因此由图 1 很容易得出上述 C 、 R_c 、 ϕ 三者之间的关系。由图 1 知 O_1 圆是以粘结力 C 为长度的共点切线和 R_c 为直径所作的圆, 共点切线的交点为 L , 且知 $\angle KO_2M = 90^\circ - \phi, \angle KO_2L = \frac{1}{2}(90^\circ - \phi) = 45^\circ - \phi/2$, 则 $\operatorname{tg}(45^\circ - \phi/2) = \frac{LO}{OO_1} = \frac{C}{R_c/2}$, 即 $C = \frac{R_c}{2} \operatorname{tg}(45^\circ - \phi/2)$ 。三者之间的关系已由此式表达无遗。明确之后再推求两纳公式之相等。

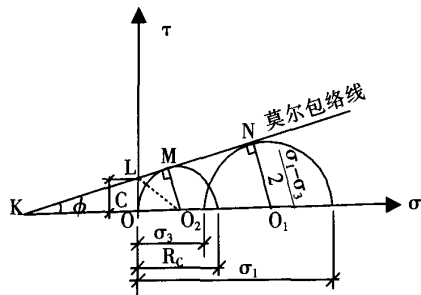


图 1 用莫尔应力圆表示的 C 、 R_c 、 ϕ 三者之间的关系

试用芬纳公式来推求与卡氏公式全等。利用上述关系式和预备知识:

芬纳公式: $R_p = \gamma_a \left[\frac{P + C \cdot \cos \phi (1 - \sin \phi)}{C \cdot \cos \phi} \right]^{1/(K_p - 1)}$

万方数据

(代入 $C = \frac{R_c}{2} \operatorname{tg}(45^\circ - \phi/2)$ 后)

$$= \gamma_a \left[\frac{P + \frac{R_c}{2} \operatorname{tg}(45^\circ - \phi/2) \cdot \cos \phi (1 - \sin \phi)}{\frac{R_c}{2} \operatorname{tg}(45^\circ - \phi/2) \cdot \cos \phi} \right]^{1/(K_p - 1)}$$

$$= \gamma_a \left[\frac{2P + R_c \operatorname{tg}(45^\circ - \phi/2) \cdot \cos \phi (1 - \sin \phi)}{R_c \operatorname{tg}(45^\circ - \phi/2) \cdot \cos \phi} \right]^{1/(K_p - 1)}$$

由基本知识(6)式可得:

$$= \gamma_a \left[\frac{\frac{2P(1 - \sin \phi)}{R_c \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}} \cdot \cos \phi} + \frac{R_c \operatorname{tg}(45^\circ - \phi/2) \cdot \cos \phi (1 - \sin \phi)}{R_c \operatorname{tg}(45^\circ - \phi/2) \cdot \cos \phi}}{1} \right]^{1/(K_p - 1)}$$

$$= \gamma_a \left[\frac{2P(\sqrt{1 - \sin \phi} \cdot \sqrt{1 + \sin \phi})}{R_c \cdot \cos \phi} + (1 - \sin \phi) \right]^{1/(K_p - 1)}$$

$$= \gamma_a \left[\frac{2P\sqrt{1 - \sin^2 \phi}}{R_c \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \phi}} + (1 - \sin \phi) \right]^{1/(K_p - 1)}$$

$$= \gamma_a \left[\frac{2P \sin \phi}{R_c} + (1 - \sin \phi) \right]$$

分子分母同乘以 $K_p + 1 = \frac{2}{1 - \sin \phi}$ 后得:

$$= \gamma_a \left[\frac{2P \cdot \frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi} + R_c (1 - \sin \phi) \cdot \frac{2}{1 - \sin \phi}}{(K_p + 1) R_c} \right]^{1/(K_p - 1)}$$

\therefore 由预备知识式(5) $K_p - 1 = \frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}$

$$= \gamma_a \left[\frac{2}{K_p + 1} \cdot \frac{P(K_p - 1) + R_c}{R_c} \right]$$

\therefore 两式相等, 得以完全证明。

这也和微积分的发明一样, 同时代的人牛顿和莱布尼兹两人在互不知情的情况下, 创立了一些相同的公式。但这里必须说明, 开始芬纳创建的公式得出较大的结果。上文介绍的是修正后的公式, 得出与卡斯特纳相同而正确的结果。下面举算例以明之。

3.2 应用示例

一埋深 400 m, 单线铁路隧道开挖半径 $\gamma_a = 5.12$ m, 其他地质状况及物理力学指标符合现行隧道设计规范表 3.2.8 中的 V 级围岩上限的标准, 即围岩重度 $\gamma = 20$ kN/m³; 内摩擦角 $\phi = 27^\circ$; 粘结力(内聚力) $C = 0.2$ MPa。试用两纳公式计算其塑性区半径 R_p , 以验证两者之全同。

解: 先按芬纳公式计算:

$$R_p = \gamma_a \left[\frac{P + C \cdot \cos \phi (1 - \sin \phi)}{C \cdot \cos \phi} \right]^{1/(K_p - 1)}$$

其中:

$$K_p = \operatorname{tg}^2(45^\circ + \phi/2) = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \operatorname{tg}^2(45^\circ + \frac{27^\circ}{2}) = \operatorname{tg}^2(58.5^\circ) = 2.6629$$

$$K_p+1=3.6629 \quad K_p-1=1.6629$$

$$P=400 \times \frac{20}{1000}=8.0 \text{ MPa}$$

$$R_p = \left[\frac{(8.0+0.2\cos 27^\circ)(1-\sin 27^\circ)}{0.2\cos 27^\circ} \right]^{\frac{1}{1.6629}} \cdot 5.12$$

$$=[11.6743]^{0.6013} \cdot 5.12=[4.3825] \cdot 5.12=22.439 \text{ m}$$

再按卡斯特纳公式计算:

$$R_p = \gamma_a \left[\frac{2}{K_p+1} \cdot \frac{P(K_p-1)+R_c}{R_c} \right]^{1/(K_p-1)}$$

$$=5.12 \left[\frac{2}{3.6629} \cdot \frac{8 \times 1.6629 + 0.6527}{0.6527} \right]^{0.60136}$$

$$=5.12 [11.6738]^{0.60136}$$

$$=5.12 [4.3831]=22.44 \text{ m}$$

$$\text{其中 } R_c = 2C / \tan(45^\circ - \frac{27^\circ}{2}) = 2 \times 0.2 / \tan 31.5^\circ = 0.6527 \text{ MPa}$$

4 结论

上述分析和示例说明了两纳公式殊途同归, 结果完全一致。但这里必要的条件是公式中的数据必须完全对应。如示例中 R_c 、 C 和 ϕ 值必须是彼此对应的, 如果一项发生些许差错, 便会使结果发生差错。也说明了隧规所例数据是彼此对应准确的, 用两纳公式检验无一谬误。塑性半径 R_p 太重要了, 它是塑性岩洞室发生挤压的根源, 故在其内涵中数据要求有很高的准确性, 否则失之毫厘, 差之千里, 造成挤压力计算的不准确。

既然推导了两纳公式在理论上全等又用示例演算了结果完全相同, 那么为什么在标题中还要提到“异同”二字呢? 异就异在用法上。我们知道一般较强的岩石可以通过岩芯取样或凿块取样直接用单轴抗压来求取它的单轴极限压强 R_c 。但很多较弱的岩石无论用何种取样方法都难以取到可以试验的样品, 比如家竹箐隧道在碎弱的煤系地层中根本找不到样品可供试压, 只好在其夹层中——较软砂岩中取样代替。这在很大程度上说明了样品和结果的不真实性。所以在难以取样的软岩即塑性岩中, 就必须用三轴试验的方法来求

取 σ 、 C 、 ϕ 值(虽然有的数值也要通过间接转换才能得到)。岩块是否能直接取压强, 是选择两个公式的标志。以此出发, 芬纳就创立了适合于塑性软岩的公式而硬岩则可用卡斯特纳公式。这就是它们的不同点。当然两者通过莫尔强度理论还可转换。

近年来, 通过最小二乘法有用统计分析的方法来处理岩石力学试验数据的, 如图2。该图是以最大主应力 σ_1 为纵坐标、最小主应力 σ_3 为横坐标的强度包络线。因在图1中可得到 $\sin \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2c \cdot \cos \phi}$ 。

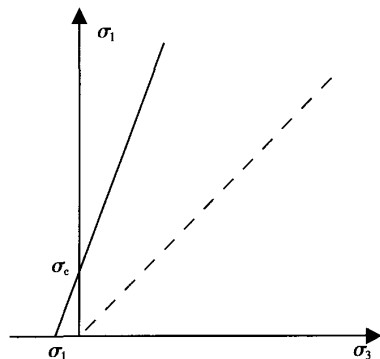


图2 用 σ_1 - σ_3 表示的库伦—莫尔强度线

经推导, 得:

$$\sigma_1 = \sigma_3 \cdot \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} + \frac{2c \cdot \cos \phi}{1 - \sin \phi} = \sigma_3 \cdot K_p + \sigma_c,$$

其中 $\frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} = \sigma_c =$ 理论上的单轴抗压强度值

(MPa)。通过 K_p 和 σ_c 的物理意义可进一步求得岩石的粘结力 C 和内摩擦角 ϕ 。这也是库伦—莫尔强度理论被经常应用的原因。

塑性岩隧道是地下工程中的难点, 也是工程造价中的高昂点, 还是工期的控制点。千万不要返工。如返工, 就得花好几倍常规的钱。世界上有记录的这种隧道已有五座, 而我国就已经有两座, 但我国的两座都造成了返工浪费现象。

COMMENTS ON DIFFERENCES BETWEEN KASTNER FORMULA AND FENNER FORMULA USED FOR PLASTIC ROCK (SOFT ROCK)

FU Hua-xing

The Fifth Engineering Bureau Group Co. Ltd. of Chinese Railway

Abstract: This paper describes the differences in expression form between Kaster formula and Fenner formula popularly used for plastic rock (soft rock), deviates their same points by taking stress circle as media and change tactics, expresses their same points in application by giving practical example in order to assist application of formulas in difficult construction project.

Key words: Kaster formula; Fenner formula

作者: [符华兴](#), [FU Hua-xing](#)
作者单位: [中铁五局集团有限公司, 贵州, 贵阳, 550003](#)
刊名: [铁道工程学报](#) 
英文刊名: [JOURNAL OF RAILWAY ENGINEERING SOCIETY](#)
年, 卷(期): 2005 (3)
被引用次数: 2次

本文读者也读过(7条)

1. [符华兴](#) [应用和改造卡斯特纳公式求取家竹箐隧道塑性半径](#)[期刊论文]-[铁道工程学报](#)2003 (1)
2. [王亮](#), [赵均海](#), [李小伟](#), [WANG Liang](#), [ZHAO Junhai](#), [LI Xiaowei](#) [岩质圆形隧洞围岩应力场弹塑性新解](#)[期刊论文]-[工程地质学报](#)2007, 15 (3)
3. [任青文](#), [张宏朝](#) [关于芬纳公式的修正](#)[期刊论文]-[河海大学学报\(自然科学版\)](#)2001, 29 (6)
4. [马爱群](#), [张常光](#), [MA Ai-qun](#), [ZHANG Chang-guang](#) [围岩塑性区范围统一解](#)[期刊论文]-[路基工程](#)2010 (1)
5. [齐明山](#), [蔡晓鸿](#), [冯翠霞](#), [QI Ming shan](#), [CAI Xiao hong](#), [FENG Cui xia](#) [隧道围岩压力的弹塑性新解](#)[期刊论文]-[土工基础](#)2006, 20 (2)
6. [陈钟汶](#) [修正的芬纳公式在土井支护中的应用](#)[期刊论文]-[黑龙江科技信息](#)2007 (21)
7. [曾钱帮](#), [王恩志](#), [王思敬](#), [ZENG Qianbang](#), [WANG Enzhi](#), [WANG Sijing](#) [Hoek-Brown破坏准则求解圆形硐室塑性区半径与修正的芬纳公式比较](#)[期刊论文]-[沈阳建筑大学学报\(自然科学版\)](#) 2008, 24 (6)

引证文献(2条)

1. [王永](#), [朱川曲](#), [陈森明](#), [陈志](#) [窄煤柱沿空掘巷煤柱稳定核区理论研究](#)[期刊论文]-[湖南科技大学学报\(自然科学版\)](#) 2010 (4)
2. [孙克国](#), [张俊濡](#), [李术才](#), [许炜萍](#), [李利平](#) [长大隧道穿越张性富水软弱带诱发地表塌陷机理与支护荷载研究](#)[期刊论文]-[山东大学学报: 工学版](#) 2011 (5)

引用本文格式: [符华兴](#), [FU Hua-xing](#) [略述应用于塑性岩\(软岩\)中的卡斯特纳与芬纳两公式之异同](#)[期刊论文]-[铁道工程学报](#) 2005 (3)