

# 隧道 GPS 网横向贯通误差的计算

姚连璧\* (同济大学)

李文全 (铁道部第三勘测设计院)

**提 要** 隧道工程是铁路、公路建设不可缺少的一部分,用 GPS 建立隧道施工控制网具有速度快、精度高、费用低等优点,如何计算隧道 GPS 网对横向贯通误差的影响是非常重要的,本文在给出隧道 GPS 网横向中误差影响值的计算公式的基础上,提出了一套 GPS 用于隧道工程相应的数据处理方法并进行了实例计算。

**主题词** GPS 网 隧道 横向中误差

隧道施工平面控制测量的主要作用是确保地下两相向开挖面在横向上准确贯通,以往的隧道施工平面控制网多采用三角网和边角网等常规手段进行布设和观测。对于长隧道而言,由于常规手段要求相邻点通视,因此网中有许多过渡点,不仅增加了观测的工作量和费用,延误工期,而且由于多余的传递而带来许多误差,难以适合于快速、高效、优质的隧道施工工程的需要。近年来 GPS 技术得到了广泛的应用,在国内已应用于国家控制、地震监测、形变测量、工程测量等领域。由于利用 GPS 进行测量无需通视,因此 GPS 应用于隧道施工控制测量将有很大的优势,只需布设在洞口用于隧道施工定向的控制点,无需中间过渡点,因此具有点数少、工期短、精度高、费用低等优点。可以预见:GPS 将在铁路、公路等隧道工程中,尤其是长隧道工程中发挥巨大的作用。

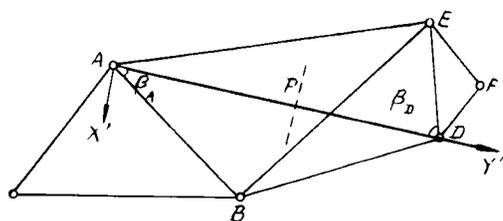


图1 GPS 隧道控制网

\* 本文收稿日期 1995-8-2 姚连璧 同济大学副教授 上海 邮编:200092

隧道施工控制网,一般采用工程坐标系,以垂直于贯通面的方向为 X 轴,平行于贯通面的方向为 Y 轴,而 GPS 是基于 WGS-84 坐标系中进行的,获得的是 WGS-84 坐标系下的成果。本文给出了 GPS 用于隧道控制测量时横向贯通中误差影响值的计算公式,提出了一套 GPS 用于工程坐标系数据处理的方法,并进行了实例计算。

## 1 隧道施工坐标系及横向贯通误差的计算公式

在隧道施工测量中,一般以与贯通面相垂直的方向为 X 轴、与贯通面平行的为 Y 轴来建立隧道施工工程坐标系。隧道工程坐标系实际上可看作为一种经过旋转的高斯平面直角坐标。因此,工程坐标系可认为是基于一种国家坐标系的参考椭球(设该椭球为  $E_0$ ),但由于测区的高程面不同,坐标轴的指向也不同,因此要在  $E_0$  的基础上进行变换来建立工程坐标系。首先将  $E_0$  的长半径增大  $da$ ,使得椭球面与测区平均高程面重合,但其扁率和椭球的定位和定向不变,该椭球称为  $E_1$ ,在该椭球上以过工程坐标系原点的子午线为中央子午线建立高斯坐标系。该高斯坐标系的原点平移到工程坐标系的原点,并绕该原点顺时针旋转  $\beta$  角,使得子午线与工程坐标系的 X 轴方向相一致,便建立了工程坐标系。

如图设为 GPS 隧道控制网,P 为贯通面, $X'AY'$  为隧道施工坐标系。

A,D 为洞口控制点,B,E 为定向点,C,F 作为检核点,若不考虑洞内测量误差,则由 A,D 分别推得 P 点的坐标分别为  $X_{PA}, Y_{PA}, X_{PD}, Y_{PD}$ ,则 P 点横坐标差  $\Delta Y_p = (Y_{PD} - Y_{PA})$  的中误差即为 GPS 测量对横向贯通的影响。

$$\Delta Y_p = (Y_{PD} - Y_{PA}) = Y_D - Y_A + S_{DP} \sin(T_{DE} - \beta_D) - S_{AP} \sin(T_{AB} - \beta_A) \quad (1)$$

$\beta_A, \beta_D$  为进出口的定向角, $\beta_A, \beta_D, S_{AP}, S_{DP}$  的误差可放在洞内测量中讨论,因此有微分式:

$$d(\Delta Y_p) = dY_D - dY_A + (\Delta X_{DP} dT''_{DE} - \Delta X_{AP} dT''_{AB}) / \rho'' \quad (2)$$

将  $dT''_{DE}, dT''_{AB}$  用 A、B、D、E 坐标的微分表示则得:

$$\begin{aligned} d(\Delta Y_p) = & -a_{AB} \Delta X_{AP} dX_A - (1 + b_{AB} \Delta X_{AP}) dY_A + a_{AB} \Delta X_{AP} dX_B \\ & + b_{AB} \Delta X_{AP} dY_B - a_{DE} \Delta X_{DP} dX_E - b_{DE} \Delta X_{DP} dY_E \\ & + a_{DE} \Delta X_{DP} dX_D + (1 + b_{DE} \Delta X_{DP}) dY_D \end{aligned} \quad (3)$$

其中:

$$a_j = \sin \alpha_j / S_j \quad (4)$$

$$b_j = -\cos \alpha_j / S_j \quad (5)$$

由(3)式可以看出,计算横向贯通误差需要知道各控制点在隧道施工坐标系中的坐标以及它们的方差-协方差矩阵,为此需把 GPS 成果转换到隧道施工坐标系。

## 2 隧道 GPS 网的数据处理

由于隧道坐标系与 WGS-84 坐标有较大的旋转,即  $\beta$  不是微小量。因此,隧道 GPS 网数据处理时,应把已知的隧道坐标转换到  $E_1$  椭球上,进行平差计算,获得  $E_1$  椭球高斯坐标及其方差-协方差矩阵。然后把  $E_1$  椭球的结果转换到隧道工程坐标系,进而可以为隧道施工服务,也可以计算 GPS 网对横向贯通中误差的影响。下面就讨论一下坐标系的转换及方差-协方差传播。

## 2.1 隧道工程坐标系与参考椭球坐标系的转换

由于 $\beta$ 不是微小量,因此有必要把已知的工程坐标系的坐标转回到 $E_1$ 高斯平面坐标系进行数据处理,处理后的结果返回到工程坐标系,下面就讨论一下两者的转换关系:

在 $E_1$ 椭球上以隧道独立坐标系原点的子午线为中央子午线,进行高斯投影建立 $XOY$ 坐标系,从图2中可以看出隧道工程坐标系 $XOY$ 与 $XOY$ 的转换关系如下:

工程坐标系转换到 $E_1$ 高斯坐标的关系式为:

$$\begin{bmatrix} Y_{ig} \\ Y_{ig} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{id} \\ y_{id} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$E_1$ 高斯坐标转换到工程坐标系的关系式为:

$$\begin{bmatrix} x_{id} \\ y_{id} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{ig} - X_0 \\ Y_{ig} - Y_0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

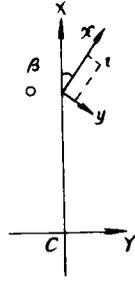


图2 坐标系

## 2.2 转换参数的计算

从前面的公式中可以看出 $\beta, X_0, Y_0$ 为两个坐标系之间的旋转和平移参数,下面讨论它的计算方法。

计算转换参数必需已知两点的大地坐标,设已知两点 $E_0$ 椭球大地坐标 $(B_1, L_1, H_1), (B_2, L_2, H_2)$ 和工程坐标 $(x_{1d}, y_{1d}), (x_{2d}, y_{2d})$ ,首先计算两点 $E_0$ 椭球的三维空间直角坐标 $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)$ :

$$\begin{aligned} X &= (N+H)\cos B \cos L \\ Y &= (N+H)\sin B \cos L \\ Z &= (N(1-e^2)+H)\sin B \end{aligned} \quad (8)$$

其中: $e$ 为第一偏心率, $N$ 为卯酉圈半径

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \quad (a \text{ 为椭球长半轴})$$

将椭球的长半径增加 $da$ ,使椭球面与工程坐标系的投影面相重合,即 $E_1$ 椭球,已知空间直角坐标可求得 $E_1$ 椭球上两点的大地坐标 $(B'_1, L'_1, H'_1), (B'_2, L'_2, H'_2)$ 。

$$\begin{aligned} L &= \arctg(Y/X) \\ B &= \arctg(Z + Ne^2 \sin B) / \sqrt{X^2 + Y^2} \\ H &= \sqrt{X^2 + Y^2} / \cos B - N \end{aligned} \quad (9)$$

其中纬度由上述(2)式迭代求得,初值为 $B_0 = \arctg(Z / \sqrt{X^2 + Y^2})$

在  $E_1$  椭球上以  $L'_1$  为中央子午线计算两点的高斯坐标  $(X'_{1g}, Y'_{1g}), (X'_{2g}, Y'_{2g})$  及方位角  $A'_{12g}$ , 其与隧道工程坐标系 1, 2 两点的方位角  $A_{12d}$  之差设为  $\beta$ , 第一点高斯坐标与工程坐标之差为  $X'_0, Y'_0$ , 以  $X'_0, Y'_0, \beta$  为转换参数计算隧道工程坐标系原点的高斯坐标  $X'_{0g}, Y'_{0g}$ , 由高斯坐标即可求得隧道坐标系原点的  $E_1$  椭球大地坐标  $B_0, L_0$ , 以  $L_0$  为中央子午线进行高斯投影, 得到两点以  $L_0$  为中央子午线的高斯坐标  $(X_{1g}, Y_{1g}), (X_{2g}, Y_{2g})$  及方位角  $A_{12g}$ , 其与  $A_{12d}$  之差即为旋转角  $\beta$ , 第一点的高斯坐标  $(X_{1g}, Y_{1g})$  与隧道工程坐标  $(X_{1d}, Y_{1d})$  经过逆时针旋转  $\beta$  角所获得的坐标之差即为平移参数  $X_0, Y_0$ 。

在实际工作中若大地坐标未知, 可采用一个点的单点定位结果以及由基线向量推得的另一点的结果进行计算。

**2.3 隧道工程坐标系中各控制点的方差及协方差传播**

一般 GPS 是在  $E_1$  椭球上以经纬度作为参数进行平差处理的, 获得各点经纬度的方差—协方差阵, 还必需把它按下式转化到高斯坐标系

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} dB \\ dL \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$R = \begin{bmatrix} M + N(1 - 2\sin^2 B)l^2/2 & N l \cos B \sin B \\ -M l \sin B & N \cos B(1 + l^2(1 - 2\sin^2 B)/2) \end{bmatrix} \tag{11}$$

其中  $N$  为子午圈半径,  $M$  为卯酉圈半径,  $l$  为相对中央子午线的经差。

为了获得隧道工程坐标中的方差—协方差阵, 可由(7)式按误差传播进行计算  $i$  点在地方独立坐标中的坐标协方差阵。

$$Q'_i = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{xi,xi} & Q_{xi,yi} \\ Q_{yi,xi} & Q_{yi,yi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{12}$$

$i$  点与  $j$  点的相关协方差为:

$$Q'_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{xi,xi} & Q_{xi,yi} & Q_{xi,xj} & Q_{xi,yj} \\ \text{对} & Q_{yi,yi} & Q_{yi,xj} & Q_{yi,yj} \\ & & Q_{xj,xj} & Q_{xj,yj} \\ & & \text{称} & Q_{yj,yj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{13}$$

**2.4 隧道 GPS 数据处理流程**

- (1) 由两点的大地坐标及隧道坐标计算旋转和平移参数  $\beta, X_0, Y_0$ ;
- (2) 按(6)式把隧道坐标转为高斯坐标, 再把高斯坐标转为  $E_1$  椭球大地坐标;
- (3) 在  $E_1$  椭球上进行 GPS 网平差, 获得各点的经纬度及方差—协方差阵, 进而计算以  $L_0$  为中央子午线的各点的高斯坐标及方差—协方差阵;
- (4) 按(7)式计算隧道工程坐标系中各控制点的坐标, 按(12), (13)式计算隧道工程坐标系中各控制点的坐标方差—协方差阵;
- (5) 按(3)式计算隧道 GPS 网对横向贯通误差的影响。

**3 算例**

如图 2 为直线隧道控制网, 隧道坐标系以  $A$  点为坐标原点,  $A-D$  为  $X$  轴正向, 首先利用  $A, D$  点的隧道工程坐标及过  $A$  点中央子午线的高斯坐标计算两个坐标系的转换参数, 得到:

平移参数:  $X_0 = 3\ 464\ 737.845$

$Y_0 = 500\ 000.000$

旋转参数:  $\beta = 91\ 37\ 58$

根据该参数把  $D$  点的坐标变换到  $E_1$  高斯坐标, 固定两点进行 GPS 网平差, 平差后的坐标及方差—协方差阵再转到隧道工程坐标系中, 在隧道坐标系中的坐标及方差—协方差阵如表 1 及表 2:

表 1 隧道坐标系坐标

$N_0$	$x$	$y$
$C$	-1582.611	1720.867
$E$	1970.758	-607.127
$A$	0.000	0.000
$B$	1395.343	455.288
$F$	2176.162	-406.861
$D$	2060.548	0.000

表 2 坐标方差—协方差阵 ( $\text{mm}^2$ )

$x_c$	$y_c$	$x_e$	$y_e$	$x_b$	$y_b$	$x_f$	$y_f$
1.6440	-0.0310	-0.1878	-0.0195	0.1157	-0.1596	-0.1423	-0.0236
	2.0800	0.0024	-0.2014	0.1670	0.1182	0.0130	-0.1525
		0.2884	0.0033	0.0844	0.0562	0.1727	0.0065
对			0.3056	-0.0643	0.0958	-0.0016	0.1832
				0.3690	-0.0057	0.0512	-0.0464
					0.3833	0.0407	0.0574
						0.5056	0.0041
							0.7407

$$d(\Delta y_f) = 0.2177d_{x_b} - 0.6673d_{y_b} + 1.6608d_{x_e} + 1.2456d_{y_e}$$

横向中误差为:  $m_0 = 1.1\text{m}$ 。

## 4 结束语

GPS 测量具有精度高、速度快、无需通视等优点, 因此应用于隧道工程具有良好的应用前景。与常规测量相比, GPS 是一种全新的测量手段, 在应用中会出现很多有待解决的问题。本文对隧道 GPS 网横向贯通误差的计算进行了探讨, 提出了隧道 GPS 网相应的数据处理方法, 希望能为 GPS 在隧道工程中的应用起到一定的促进作用。当然, GPS 在隧道工程中的应用还有许多要探讨的问题, 如: 网的可靠性、起始数据位置及网形对横向贯通误差的影响等, 有待于今后进一步研究。

## 参考文献

- 刘大杰. 平面控制点的相对点位精度. 测绘学报. 1984. 8  
 张正禄. 论隧道施工三角网和边角网测量误差对横向贯通误差的影响和网的最优化设计. 测绘学报. 1982. 8

## CALCULATION OF LATERAL ERROR OF PIERCING IN TUNNEL GPS NETWORK

Yao Lianbi

Tongji University

Li Wenquan

Third Design and Survey Institute, Ministry of Railway

**Abstract** Tunnel engineering is a necessary part in the railway and highway constructions. The tunnel construction network established by using GPS has the advantages of high speed, high precision and low expenses. The calculation about the influence of tunnel GPS network to the lateral error of piercing is very important. Basing on the conducted formula of tunnel GPS lateral mean square error of piercing, the authors present one set of data processing method about GPS used in tunnel engineering, and give a calculating example in the practical engineering.

**Keywords** GPS network; tunnel; lateral error of piercing

### 铁一院首次实现公路全线桥梁设计图 CAD 化

经过铁道部第一勘测设计院桥隧处工程技术人员的共同努力,一院首次实现了公路全线桥涵设计计算机绘图 100% 的目标。

今年 5 月下旬桥隧处承担了京沪高速公路山东化马湾至临沂段的初步设计,本段公路长 85km,公路等级高、桥涵多。该处将这段公路桥涵设计作为 CAD 技术上台阶的突破口,及时引进和开发了 BSAS、斜拉桥计算程序及公路桥梁集成化 CAD 等软件。经过一个月的拼搏,终于按计划完成任务,共出图 195 张,提高工效一倍以上。使本段公路桥梁设计图纸全部 CAD 化,为争取 1997 年甩掉图板,全部设计文件实现 CAD 化目标提供了成功的范例。

(柳河)