

# 轮轨冲击力及轨道动力参数的探讨

兰州铁道学院土木工程系 仲延禧

轮轨之间的冲击力是导致轨道破坏的重要原因之一。对此,人们早已有所认识,并从多方面进行了研究。日本国铁(JNR)技术研究所用落轴试验的方法测定轨道的动力特性,研究轮轨冲击力的规律,取得了重要的结论和很有价值的资料。《轨道弹簧刚度和阻尼系数的测定》(1)所介绍的思路与方法可供我们借鉴。笔者为配合轮轨冲击力的实验研究,对原文进行了较深入地学习,并对文中的各个公式进行了推导和论证,供实验研究参考。

应该说明,《轨道弹簧刚度与阻尼系数的测定》一文中所提出的理论模型是比较简单的,研究的结论也比较粗略。尽管如此,仍可作为我们研究,分析的参考,并在此基础上建立更切合实际的力学模型,进行更精确的分析。由于原文只给出了冲击力及有关动力参数的表达式,未进行理论上的分析之阐述,因而不易理解各个表达式所描述的物理现象和实质。本文力图探明原作者的思路与分析方法,应用力学原理对各个公式进行推导与论证,以求弄清公式的意义与来历。另外本文还提出了笔者的见解,有助于指导实验和分析实验现象。

## 一、轮轨冲击过程与冲击力公式

日本自1968年以来,先后在不同的轨道上进行了多次落轴实验。(1)由实验得到的冲击力的波形图如图1所示。从图中可见,轮轨接触后的开始阶段,冲击力急剧增长,图形的前沿很陡,很快地达到一个极值,然后又有轻微地减小,紧接着以曲线式较慢地增长,并再次达到另一个极值;此后冲击力以曲线形式减小直到最后减为零。整个冲击过程是在几毫秒内完成的。冲击力波形图,除开始一段接近一直线外,后边大的波形表明了冲击与振动衰减的特点,而且在此大的(基本的)波形上还附加有小的波形。

在分析这种现象时,考虑到基本波形在冲击过程中占主要部分,因而首先研究此基本波形。对于初始阶段的图形和附加波形,再另作分析。据此,建立轮轨冲击时的计算模型如图2所示。在该轮轨系统中,由于钢轨的有效质量不到车辆弹簧下质量的 $\frac{1}{10}$ ,故可略去钢轨质量,简化成单自由度的质量—弹簧—阻尼系统。在此系统中弹簧刚度 $k$ 就是轨道的弹簧刚度,阻尼系数 $C$ 就是表示轨道的阻尼作用,而不涉及轮轨间接触的弹性与阻尼。

由图2,把坐标原点选在冲击前轨面处, $y$ 轴向下为正。在冲击力作用下,按单自由度有阻尼自由振动建立微分方程:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad (1)$$

(1) 式中 $m$ 为车轮质量(车辆簧下质量)。亦可把(1)式改写成: (4)

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = 0 \quad (1a)$$



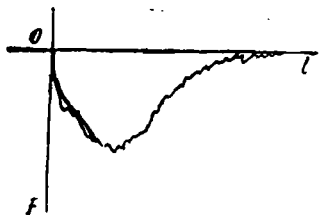


图1 冲击力波形图

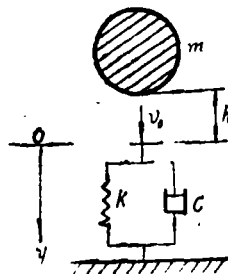


图2 落轴冲击时计算模型

$$(1a) \text{ 式中 } \xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (\text{阻尼比}) \quad (2a)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{系统自振频率}) \quad (3)$$

(1a) 式的特征方程的根

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2} \\ &= \omega_n(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{aligned} \quad (4)$$

故方程 (1a) 的解

$$\begin{aligned} y &= A_1 e^{p_1 t} [(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n'] + A_2 e^{p_2 t} [(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n'] \\ &= e^{-\xi\omega_n' t} [A_1 e^{i\sqrt{1-\xi^2}\omega_n' t} + A_2 e^{-i\sqrt{1-\xi^2}\omega_n' t}] \\ &= e^{-\xi\omega_n' t} [A_1 e^{i\sqrt{1-\xi^2}\omega_n' t} + A_2 e^{-i\sqrt{1-\xi^2}\omega_n' t}] \end{aligned}$$

$$\text{令 } \omega_d = \sqrt{1-\xi^2}\omega_n \quad (\text{有阻尼自振频率}) \quad (5)$$

$$\therefore y = e^{-\xi\omega_n' t} [A_1 e^{i\omega_d' t} + A_2 e^{-i\omega_d' t}] \quad (6)$$

$A_1, A_2$  为待定常量。

根据欧拉公式 (6) 式可改写成:

$$y = e^{-\xi\omega_n' t} [A_1(\cos\omega_d' t + i\sin\omega_d' t) + A_2(\cos\omega_d' t - i\sin\omega_d' t)] \quad (7)$$

消去虚数, 令  $B_1 = A_1 + A_2, B_2 = (A_1 - A_2)i$

(7) 式可写成:

$$y = e^{-\xi\omega_n' t} (B_1 \cos\omega_d' t + B_2 \sin\omega_d' t) \quad (8)$$

确定常数  $B_1$  与  $B_2$

$$\text{由 } t = 0, y = 0. \text{ 得 } B_1 = 0 \quad (9)$$

$$\text{由 } t = 0, \dot{y} = V_0$$

而

$$\dot{y} = e^{-\xi\omega_n' t} [-B_2\xi\omega_n \sin\omega_d' t + B_2\omega_d \cos\omega_d' t] \quad (10)$$

$$\therefore B_2 = \frac{V_0}{\omega_d} \quad (11)$$

故 (8) 式可写成:

$$y = \frac{V_0}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n' t} \sin\omega_d' t \quad (12)$$



(12) 式表明, 轮轨系统的运动是具有初始速度  $V_0$  (无初位移) 的有阻尼自由振动, 将 (12) 式取一阶导数, 可得轮轨系统的速度方程

$$\dot{y} = \frac{V_0}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} (\omega_d \cos \omega_d t - \xi \omega_n \sin \omega_d t) \quad (13)$$

由前所述, 考虑到轨道质量与车辆簧下质量相比要小得多, 故在冲击力作用下轨道的惯性力可略去不计, 轨道的受力情况如图 3 所示。据此, 可建立平衡方程:

$$F = c\dot{y} + ky \quad (14)$$

(14) 式中,  $F$  为冲击力,  $c\dot{y}$  为阻尼力,  $ky$  为弹簧恢复力。将 (12)、(13) 式代入 (14) 式, 得

$$F = \frac{V_0}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} [(k - C\xi\omega_n) \sin \omega_d t + C\omega_d \cos \omega_d t] \quad (15)$$

引入初相角  $\theta_2$ , 将 (15) 式化简,

$$\left. \begin{aligned} k - C\xi\omega_n &= D \cos \theta_2 \\ C\omega_d &= D \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$D = \sqrt{(k - C\xi\omega_n)^2 + (C\omega_d)^2} = k \quad (17)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{C\omega_d}{k - C\xi\omega_n} = \frac{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{1-2\xi^2} \quad (18)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{1-2\xi^2} \quad (18a)$$

将 (16)、(17) 式代入 (15) 式, 则可得冲击力的表达式:

$$F = \frac{kV_0}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta_2) \quad (19)$$

(19) 式与文献 (1) 中的 (2) 式完全一致。按 (19) 式绘出的图形如图 4 所示。

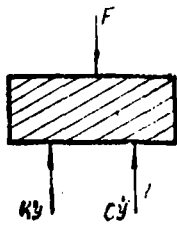


图 3 轨道受力图

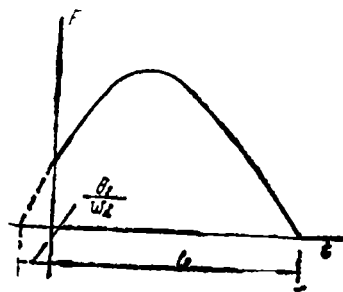


图 4 冲击力的计算图

冲击力的最大值

$$F_{\max} \text{ 由 } \frac{d}{dt} F = 0$$

$$\text{即 } \frac{kV_0}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} (-\xi\omega_n \sin(\omega_d t + \theta_2) + \omega_d \cos(\omega_d t + \theta_2)) = 0$$

得

$$\tan(\omega_d t + \theta_2) = \frac{\omega_d}{-\xi\omega_n} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}$$



$$\therefore t = \frac{1}{\omega_d} \left\{ \operatorname{tg}^{-1} \left( -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) - \theta_2 \right\} \quad (20)$$

$$\text{令} \quad \theta_3 = \operatorname{tg}^{-1} \left( -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \quad (21)$$

$$\text{故,} \quad t = \frac{1}{\omega_d} \{ \theta_3 - \theta_2 \} \quad (20a)$$

将由 (20a) 求得的  $t$  值代入 (19) 式可得冲击力的最大值

$$\begin{aligned} F_{\max} &= \frac{kV_0}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n \cdot \frac{1}{\omega_d}(\theta_3 - \theta_2)} \cdot \sin \theta_2 = \frac{kV_0}{\omega_d} e^{-\xi \frac{(\theta_3 - \theta_2)}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cdot \sqrt{1-\xi^2} \\ &= \frac{kV_0}{\omega_n} \cdot e^{-\xi \frac{(\theta_3 - \theta_2)}{\sqrt{1-\xi^2}}} \end{aligned} \quad (22)$$

在 (22) 式中, 由于  $\theta_3, \theta_2$  甚小, 并将 (3) 式代入, 故该式可近似的写作:

$$F_{\max} = \frac{kV_0}{\omega_n} = V_0 \sqrt{mk} \quad (23)$$

英国铁路(BNR)Derby研究中心Frederick在80年来华时, 提出  $P_2$  力 (中频力) 的计算公式 (2) 为:

$$P_2 = P_0 + aV\sqrt{mk} \quad (24)$$

式中  $P_0$  为静轮载,  $V$  是列车运行速度,  $a$  是将运行速度换算成冲击速度的系数, 其它符号的意义与本文相同。可见由 (23) 式所确定的最大冲击力与 (24) 式的第二项相同。(24) 式中  $P_0$  一项, 是考虑列车运行接近冲击点时的影响 (5)。而在落轴实验中, 这种影响是不能反映的。

日本在落轴实验时, 轮对质量大约为实验车辆簧下质量的  $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{3}$ , 当落轴高度为10厘米时, 冲击力的最大值达到25吨~35吨。

## 二、轨道弹簧刚度

由 (19) 及 (20) 式可知, 轮轨冲击力同轨道弹簧刚度及轨道阻尼系数有关。因此, 必须用实验的方法确定这些系数。但是, 实验也不能直接测定这些系数。如轨道弹簧刚度是用测定冲击持续时间的办法, 然后通过换算确定轨道弹簧刚度。设冲击持续时间为  $t_0$ , 冲击过程结束时, 冲击力为 0, 即  $F=0$ , 由 (19) 式可知:

$$\begin{aligned} \sin(\omega_d t + \theta_2) &= 0 \\ \therefore \omega_d t_0 + \theta &= n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \text{取 } n = 1, \quad t_0 &= \frac{\pi - \theta_2}{\omega_d} \end{aligned} \quad (25)$$

但  $t_0$  是可以测得的, 故 (25) 式可写成:

$$\begin{aligned} \omega_n \sqrt{1-\xi^2} &= \frac{\pi - \theta_2}{t_0} \\ \text{或} \quad \sqrt{(1-\xi^2)} \frac{k}{m} &= \frac{\pi - \theta^2}{t_0} \end{aligned} \quad (26)$$



$$\therefore k = \frac{m(\pi - \theta_2)^2}{(1 - \xi^2)t_0^2} \quad (27)$$

(27) 式是轨道弹簧刚度的表达式, 它表明轨道弹簧刚度同落轴质量, 轮道阻尼与冲击持续时间的关系, 同文献 (1) 中 (8) 式相同。据日本测定, 冲击持续时间  $t_0$  随着落轴高度的增加而减小, 因而冲击速度提高时, 轨道弹簧刚度增加。如当落轴高度为 5 厘米时, 轨道弹簧刚度为 100~120 吨/厘米; 当落轴高度为 15 厘米时, 弹簧刚度为 150~170 吨/厘米。

### 三、恢复系数和轨道阻尼系数

要确定轨道的阻尼系数  $C$ , 应先确定阻尼比  $\xi$ , 再根据 (2) 式计算阻尼系数。但怎样确定阻尼比  $\xi$  呢? 日本国铁研究所设想, 车轮以速度  $V_0$  冲击轨道, 然后又以速度  $V_1$  回弹。把回弹速度  $V_1$  与冲击速度  $V_0$  之比的绝对值定义为恢复系数  $\gamma$ , 即

$$\gamma = \frac{|V_1|}{V_0} \quad (28)$$

(28) 式反映了冲击过程中的速度损失, 根据这种恢复系数与阻尼比  $\xi$  的关系, 测出回弹速度  $V_1$ , 求出恢复系数  $\gamma$ , 即可由  $\gamma - \xi$  的关系曲线查得  $\xi$ 。(见图 5) 当然, 在轮轨冲击过程中这样定义恢复系数是否恰当, 还有待进一步讨论。以下仍按原文思路导出恢复系数与阻尼比的关系。

由 (13) 式可知:

$$\dot{y} = \frac{V_0}{\omega_d} e^{-\xi \omega_n t} [\omega_d \cos \omega_d t - \xi \omega_n \sin \omega_d t] \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_d &= E \sin \theta_2 \\ -\xi \omega_n &= E \cos \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

(29) 式中  $\theta_2$  为速度方程的初相角,  $E$  为待定常数。

$$\therefore \tan \theta_3 = -\frac{\omega_d}{\xi \omega_n} = -\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \quad (30)$$

$$E = \sqrt{\omega_d^2 + (\xi \omega_n)^2} = \sqrt{\omega_n^2 (1 - \xi^2) + \xi^2 \omega_n^2} = \omega_n \quad (31)$$

$$\therefore \dot{y} = \frac{V_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta_3) \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta_3 &= \sqrt{1 - \xi^2} \\ \cos \theta_3 &= -\xi \end{aligned} \right\} \quad (29a)$$

车轮以速度  $V_1$  回弹时, 冲击力为 0。故

$$t = \frac{\pi - \theta_2}{\omega_d} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{V_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}(\pi - \theta_2)} \sin(\pi - \theta_2 + \theta_3) \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}(\pi - \theta_2)} \sin(\theta_2 - \theta_3) \end{aligned}$$



$$= \frac{V_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}(\pi-\theta_2)} \cdot (\sin\theta_2 \cdot \cos\theta_3 - \cos\theta_2 \cdot \sin\theta_3) \quad (33)$$

将(29a)式代入(33)式得:

$$V_1 = V_0 e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}(\pi-\theta_2)} \quad (34)$$

$$\therefore \gamma = \frac{|V_1|}{V_0} = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}(\pi-\theta_2)} \quad (35)$$

由(18a)式知

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{1-2\xi^2}$$

所以, 恢复系数 $\gamma$ 仅为阻尼比 $\xi$ 的函数。作出 $\gamma-\xi$ 关系曲线如图5。

然而 $V_1$ 在实验中是不能直接测取的。由于车轮以速度 $V_1$ 回弹时, 相当于物体作上抛运动。即以 $V_1$ 速度上到 $h_1$  ( $h_1 = \frac{V_1^2}{2g}$ ) 时, 速度为零, 然后自由下落, 当其回到轨面时速度仍为 $V_1$ 。这样一上一下所经历的时间为 $2t_1$  (见图6) 故回弹速度为 $V_1$ :

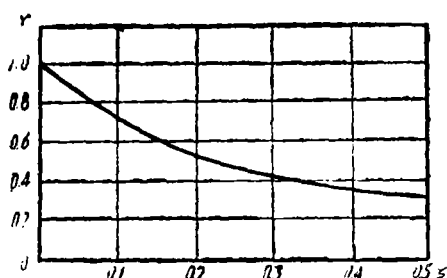


图5  $\gamma-\xi$ 曲线

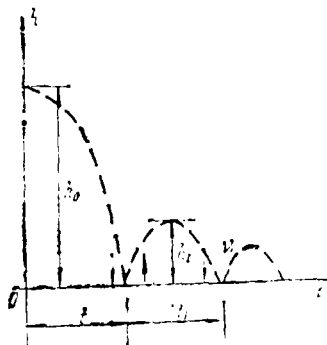


图6 落轴的运动

$$V_1 = gt_1$$

在实验中只要测定第一次冲击结束到第二次冲击开始所经历的时间 $2t_1$ 即可算出 $V_1$ , 进而求得恢复系数 $\gamma$ 。

日本根据落轴实验测定冲击速度不同时, 恢复系数接近一常量, 其值大约在0.6~0.7左右。这种方法是否可取, 这个结论对我们是否适用, 尚需通过实验来检查与验证。

由恢复系数确定阻尼比后, 即可按(3)式计算阻尼系数

$$C = 2m\omega_n \xi = 2\xi \sqrt{mk} \quad (36)$$

日本据实测资料计算的轨道阻尼系数 $C$ 在65~115公斤·秒/厘米左右, 随着冲击速度的提高 $C$ 值有增大的趋势, 且随轨道结构条件不同而变化。

#### 四、接触弹簧刚度

车轮和钢轨都是弹性体, 因此, 在冲击时轮轨接触面上都会产生弹性变形, 即可以看作在轮轨接触处有一接触弹簧。由于轮轨的相对变形微小, 所以接触弹簧的刚度比轨道弹簧的



刚度大得多。轮轨冲击开始阶段,冲击力的陡然上升正反映了接触弹簧的作用。对此,用一个自由度的质量—弹簧—阻尼系统就不能作出满意的回答。为此,需要建立更精确的轮轨系统理论模型(见图7)。图7中 $m_u$ 为车辆的簧下质量, $m_t$ 为轨道的当量质量, $k_r$ 为轮轨接触弹簧刚度。同轨道阻尼相比,轮轨间的阻尼要小得多,故可略去不计。当车轮以冲击速度 $V_0$ ( $V_0 = \sqrt{2gh}$ )冲击钢轨时,在极短的时间内速度发生很大变化,因而钢轨产生很大加速度,即必然产生很大的惯性力。当然,冲击除引起轨道加速度外,也引起钢轨的变形。由实测结果可知,冲击时的应变要比静载作用的应变大得多,特别是应变的频率很高,轮轨之间的阻尼可以忽略,故在冲击之后轮轨间的振动可看作是无阻尼自由振动。在冲击力基本波形图上附加的小波形,正反映了轮轨接触弹簧的振动情况。

若接触弹簧的振动周期为 $T_0$ ,则钢轨的自振圆频率 $\omega_v$ (4)为,

$$\omega_v = \frac{2\pi}{T_0} \quad (38)$$

即

$$\sqrt{K_v/m_t} = \sqrt{\frac{2\pi}{T_0}} \quad (38a)$$

由(38a)式求得接触弹簧的刚度:

$$K_v = 4\pi^2 \cdot \frac{m_t}{T_0^2} = 4\pi^2 \frac{\omega_v}{gT_0} \quad (39)$$

自振周期 $T_0$ 可在冲击力波形图上取出一段(见图8)。设其时间为 $\Delta T$ ,数出在 $\Delta T$ 时间内附加波形的个数 $n$ ,于是,

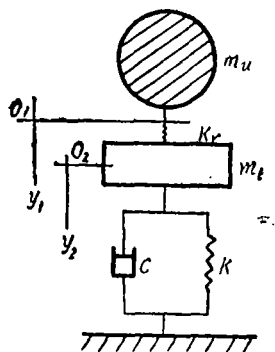


图7 考虑钢轨质

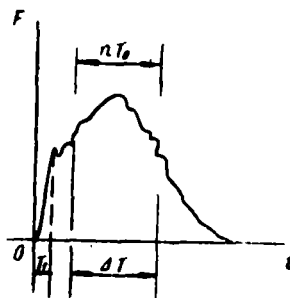


图8  $T_0$ 周期曲线

$$\begin{aligned} \Delta T &= nT_0 \\ \therefore T_0 &= \frac{\Delta T}{n} \end{aligned} \quad (40)$$

根据弹性地基梁按下式计算钢轨的有效长度 $L$

$$L = 2\sqrt{\frac{EI}{k}} \cdot 4 \quad (41)$$

并按下式求得钢轨的有效质量

$$m_t = m_0 L \quad (42)$$

(42) 式中 $m_0$ 是钢轨单位长度上的质量。



据日本测定,对60kg/m钢轨,其有效长度为144厘米,轮轨接触弹簧刚度 $K_v$ 接近一常量,其值约为16000吨/厘米。

## 五、问题讨论

(1) 用落轴实验来测定轨道动力特性,研究轮轨冲击力的规律,是一种比较简单易行的办法,不仅容易获得所需要的冲击速度,而且冲击位置可以任意选择,不必人为地在轨道上制造不平顺。所以这种方法更适于室内实验研究。但这种方法不能够反映运行荷载接近冲击点的影响,因而实验中所获资料与现象同运行荷载在实际轨道上的冲击的后果不尽相同。不过,根据轨道的动力响应,落轴实验基本上反映了轮轨冲击力的规律,因此,这种方法还是可取的。

(2) 用单自由度质量—弹簧—阻尼系统的理论模型来分析轨道的受力与运动,虽有简单的优点,但同轨道实际工作状况的差别较大,分析的结论也较粗略,有的问题就难以分析或说明,甚至导出不正确的结果。譬如在分析轨道阻尼时,文献(1)中是用测定恢复系数的办法来确定阻尼比,如前所述,为要获得车轮的“回弹速度”就要研究轮轨在一次冲击之后又产生的第二次冲击,测定两次冲击时间间隔( $2t_1$ ),应用上抛物体运动的概念,计算出回弹速度 $V_1 = gt_1$ ,从而得到恢复系数 $\gamma = \frac{|V_1|}{V_0}$ 。在动力学中,这样定义恢复系数是基于这样一种前提:即被冲击物的质量要比冲击物的质量大得多,可以看作是无穷大,方可以比较冲击物的速度损失(6)。而在轮轨冲击时车辆的质量要比钢轨的有效质量大得多,冲击之后轨道要发生变形和运动,车轮的“回弹”只表明了轮轨之间的相对运动。而 $V_1$ 则表示车轮的绝对速度,第二次冲击取决于轮轨的相对速度。显然用两次冲击的时间间隔来求车轮的“回弹速度”是不合理的。因此,分析轨道阻尼时,至少应采用两个自由度的模型(如图7),找出轮轨相对速度,并根据第二次冲击力图的衰减情况来确定阻尼比。

(3) 在落轴实验中,用测定冲击持续时间的办法来确定轨道弹簧刚度,但应注意到,轨道弹簧刚度除与冲击持续时间有关外,还同轨道阻尼有关。而轨道阻尼并不符合粘滞阻尼的假设,随着冲击速度的提高而增大,这也会使轨道弹簧的动刚度增加。所以,除测定冲击时间外,还应以轨道弹簧静刚度为基础,考虑不同冲击速度时的阻尼比,合理地确定轨道弹簧的刚度值(或曲线)。

(4) 轮轨接触弹簧刚度是用测定附加振动的平均周期办法来确定的。测定附加振动的平均周期是比较近似的,由于附加振动的衰减以及其他因素的干扰,常使这种周期难以分辨和查找。事实上,在冲击开始阶段冲击力上升的前沿及其达到第一个极值 $P_1$ 的时间,恰恰反映了轮轨接触弹簧的作用,以此作为1/4周期来计算 $P_1$ 力的作用频率,概念比较清楚,方法也较简便。

在撰写本文时,摘用了工80级学生孟存喜毕业论文中的有关资料,并得到轨道教研室主任许实儒教授的热情帮助,笔者表示深切的感激。



## 参 考 文 献

- 1) Measurement of Track Spring Constant and Attenuation Coefficient  
Ioshihiko Sato  
(《Permanent Way》No 69 1977.6)
- 2) 轨道研究概况 C.O.Frederick  
(《中国铁道科学》第三卷第一期1982年6月)
- 3) 高速铁路上轮载变化的原因及其影响  
(《轨道力学及轨道工程》论文集)  
L、米罗维奇
- 4) 运动分析基础
- 5) 关于轮轨动态作用力 $P_1$ 、 $P_2$ 的计算问题  
(兰州铁道学院许实儒1984年10月)
- 6) 理论力学(下)  
西南交大 黄安基