

对角图法计算偏角公式的讨论

长沙铁道学院 赵方民 石伦侠

提要: 本文讨论了使用偏角法求偏角 θ 和渐伸线长 E 的方法。从理论和实例上证明在跨越组合曲线测量时, 公式 $\theta = \frac{E_1 + E_2}{l_1 + l_2}$ 及 $E = (l_1 + l_2)\theta$ 均可出现很大的偏差。最后说明怎样设置置镜点才能减少误差。

一、渐伸线长度公式 $E = \int_0^L \alpha(l) dl$ 是正确公式

图1所示的曲线表示一个其本身和一阶导数均连续的函数。

$$y = f(x)$$

此函数也可以是其本身和一阶导数均连续的分段函数。具体地说, 它可以是铁路上常用的直线、圆曲线、缓和曲线或高次缓和曲线以及由它们所组成的组合曲线。它的渐伸线长度 E 可以精确地表述为

$$E = \int_0^L \alpha(l) dl \quad (1)$$

其中 l 和 $\alpha = \alpha(l)$ 是曲线的弧长和倾角, $L = \widehat{OP_0}$ 为 P_0 点处的曲线弧长, 在原点 O 上有

$$l = \alpha = 0$$

证明 图1中 $E = \widehat{P_0H}$ 为 P_0 点处的渐伸线长度。在曲线 $\widehat{OP_0}$ 内任一点 P 作切线与渐伸线 $\widehat{P_0H}$ 相交于 Q 点。 P 、 Q 点之直角坐标分别设为 $P(x, y)$ 和 $Q(X, Y)$ 。依渐伸线的定义得,

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \widehat{PP_0} = L - l & (l = \widehat{OP}) \\ \begin{cases} x = x + (L - l) \cos \alpha \\ y = y + (L - l) \sin \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

取此两式两端的微分, 并注意 $dx = dL \cdot \cos \alpha$, $dy = dl \cdot \sin \alpha$ 得

$$\begin{cases} dX = dx - dl \cdot \cos \alpha - (L - l) \sin \alpha d\alpha = -(L - l) \sin \alpha d\alpha \\ dY = dy - dl \cdot \sin \alpha + (L - l) \cos \alpha d\alpha = (L - l) \cos \alpha d\alpha \end{cases}$$

取其平方和得

$$dE^2 = dX^2 + dY^2 = (L - l)^2 d\alpha^2$$

\therefore

$$dE = (L - l) d\alpha$$

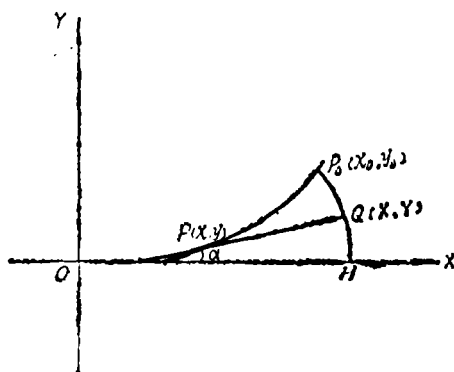


图 1

由 $l=0$ 到 $l=L$ 积分并由分部积分法得

$$E = \int_0^L (L-l) d\alpha(l) = (L-l)\alpha \Big|_{l=0}^L - \int_0^L \alpha(L) d(L-l) = \int_0^L \alpha(l) dl$$

如以曲线弧长 l 为横坐标, 以倾角 α 为纵坐标建立直角坐标系, 如图 2 所示, 则由积分性质可知: 角图曲线 $\alpha = \alpha(l)$ 下部的曲边三角形 OLP_0 的面积与 P_0 点处的渐伸线长度相等。

$$E = \int_0^L \alpha(l) dl = \triangle OLP_0.$$

这即是角图法校正曲线的基本原理之一: “角图面积等于渐伸线长度。” 它是正确的。

由于计算角图面积往往比直接由定积分计算渐伸线长度明确、简单一些, 对于组合曲线更是这样。所以人们乐于使用前者间接计算渐伸线长度。今举一例比较之: 例图 2 中, O 点和 A 点分别是常用缓和曲线的直缓点和缓圆点。 $l_0 = \overline{OA}$, 曲线半径为 R , P_0 是圆曲线上的点, $L = \overline{OL}$, 首先计算曲边三角形 OLP_0 的面积

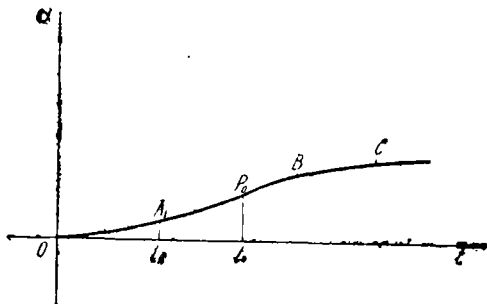


图 2

因对任意的二次抛物线 $y = Kx^2$ (如图 2 中曲线 \widehat{OA}) 有

$$\int_0^x y dx = \int_0^x K x^2 dx = \frac{1}{3} K x^3 = \frac{1}{3} \cdot x \cdot K x^2 = \frac{1}{3} x \cdot y$$

所以得:

$$\begin{aligned} E &= \triangle OLP_0 = \triangle Ol_0A + \text{梯形 } Al_0LP_0 = \frac{1}{3} \overline{Ol_0} \cdot \overline{Al_0} + \frac{1}{2} (\overline{Al_0} + \overline{P_0L}) \cdot \overline{l_0L} \\ &= \frac{1}{3} l_0 \cdot \frac{l_0}{2R} + \frac{1}{2} \left(\frac{l_0}{2R} + \frac{l_0}{2R} + \frac{L-l_0}{R} \right) \cdot (L-l_0) \\ &= \frac{l_0^2 - 3l_0L + 3L^2}{6R} = \frac{l_0^2}{24R} + \frac{(L-l_0/2)^2}{2R} \end{aligned} \quad (2)$$

再用积分法直接计算渐伸线长度:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{l^2}{2C} & \text{当 } 0 \leq l < l_0 \text{ (其中 } C = Rl_0) \\ \frac{l_0}{2R} + \frac{l-l_0}{R} = \frac{2l-l_0}{2R} & \text{当 } l_0 \leq l < L \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E &= \int_0^L \alpha(l) dl = \int_0^{l_0} \alpha dl + \int_{l_0}^L \alpha dl \\ &= \int_0^{l_0} \frac{l^2}{2C} dl + \int_{l_0}^L \frac{2l-l_0}{2R} dl = \frac{l^3}{6C} \Big|_0^{l_0} + \frac{l^2-l_0L}{2R} \Big|_{l_0}^L \\ &= \frac{l_0^2 - 3l_0L + 3L^2}{6R} = \frac{l_0^2}{24R} + \frac{(l-l_0/2)^2}{2R} \end{aligned}$$

前法不需积分, 故是人们乐用的较简单方法。

二、公式 $E = L \cdot \theta$ 不绝对正确

下述公式

$$E = L \cdot \theta \quad (3)$$

式中 θ —— 偏角

L —— 弧长

只在少数特殊曲线上是正确的, 如在圆曲线上是准确的, 但在常用缓和曲线上就不正确。

1. 在圆曲线上已确

$$E = \int_0^L \frac{l}{R} dl = \frac{l^2}{2R}$$

又因

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha = \frac{l}{2R}$$

\therefore

$$E = \frac{L^2}{2R} = L \cdot \frac{L}{2R} = L \cdot \theta$$

2. 在常用缓和曲线上存在着误差:

$$E = \int_0^L \alpha dl = \int_0^L \frac{l^2}{2C} dl = \frac{l^3}{6C}$$

参考文[3], 应有

$$\theta = \frac{L^2}{6C} - \frac{L^6}{2835C^3} - \frac{L^{10}}{467775C^5} - \dots$$

\therefore

$$E - L \cdot \theta = \frac{L^7}{2835C^3} + \frac{L^{11}}{467775C^5} + \dots \neq 0$$

一般说来这是个可以忽略的误差。但我们要注意这里的条件: 必须将置镜点设在直缓点上, 并且观测缓和曲线内部的测点上的偏角, 才有较小的误差。其他情况下 (如将置镜点设在直线上, 跨越缓和曲线观测圆曲线上的测点等情况), 将会产生很大的误差。

三、用公式 $\theta = \frac{E_1 + E_2}{L_1 + L_2}$ 来计算组合

曲线上偏角是不准确的

在现场用角图法测量时, 常乐用偏角法公式。前已指出在缓和曲线上是有误差的, 只是由于曲线很短, 误差累积不大, 但是有人跨越直缓点或缓圆点观测偏角, 误差就大了。还经常由于旧线变动, 直缓点、缓圆点、圆缓点和缓直点的准确位置无法确定, 只好跨越直线、缓和曲线及圆曲线测量, 然后绘出角图, 从图上去定直线点和缓圆点。有时为了省事将经纬仪安置在直线上, 一次测出缓和曲线、圆曲线甚至第二缓和曲线及第二直线上各测点的偏角。距离越远, 所造成的偏差越大。

下面将说明公式: (见文[1])

$$\theta = \frac{\text{角图面积}}{\text{弧长}} = \frac{\int_0^{l_1} a dl + \int_{l_1}^{l_2} a dl}{\int_0^{l_1} dl + \int_{l_1}^{l_2} dl} \quad (4)$$

来求偏角 θ 不正确。

1. 文[1]中有一个值得商榷的地方:

$$\begin{aligned} \text{因} \quad \bar{\theta} &= \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \operatorname{arctg} F'(x) \sqrt{1+F'(x)^2} dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1+F'(x)^2} dx} \\ &= \frac{\operatorname{arctg} F'(\eta) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1+F'(x)^2} dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1+F'(x)^2} dx} \\ &= \operatorname{arctg} F'(\eta) \quad (x_i < \eta < x_{i+1}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{又因} \quad \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = F'(\eta) \quad (x_i < \eta < x_{i+1}) \quad (6)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \operatorname{arctg} F'(\eta) \quad (7)$$

由(5)、(7)式的右端相等得

$$\frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \operatorname{arctg} F'(x) \sqrt{1+F'(x)^2} dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1+F'(x)^2} dx} = \operatorname{arctg} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (8)$$

但实际上(5)式右端的中值 η 是从积分中值定理得来,(6)式(也即(7)式)右端的中值 η 是从微分中值定理得来。两个中值 η 同为开区间 (x_i, x_{i+1}) 内的点,但并不一定相等,若它们两者确实相等,也须经过严格证明。

2. 定理 公式

$$\int_0^l a(t) dt = l \cdot \theta \quad (9)$$

成立的充要条件是:该曲线必须是直线或圆或某些等角螺线。

(其中所论曲线通过原点, t 为动点上的弧长, $l = \widehat{OP}$ 、 $r = \widehat{OP}$, $\theta = \angle XOP$ 及 α 分别是 P 点的弧长、矢径、偏角及倾角。)

证明(9)式两端对 l 求导得

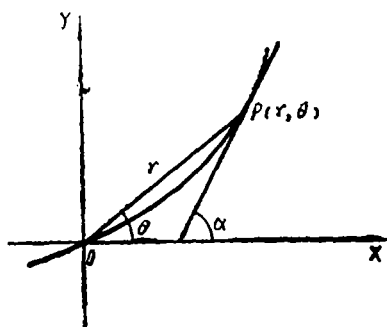


图 3

$$\alpha = \theta + l \frac{d\theta}{dl}$$

$$\therefore \frac{dl}{d\theta} \cdot (\alpha - \theta) = l \quad (10)$$

设法将此方程化为极坐标系统的微分方程。因为

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{d\theta}(r \sin \theta)}{\frac{d}{d\theta}(r \cos \theta)} = \frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sin \theta}$$

$$\text{其中} \quad r' = \frac{dr}{d\theta}$$

$$\therefore \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \theta + \frac{r}{r'}}{1 - \operatorname{tg} \theta \cdot \frac{r}{r'}}$$

将 $\frac{r}{r'}$ 当作一个未知数, 解出得

$$\frac{r}{r'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta} = \operatorname{tg}(\alpha - \theta)$$

$$\therefore \alpha - \theta = \operatorname{arctg} \frac{r}{r'} + k\pi$$

其中 k 是一个任意整数, 代入 (10) 式得

$$\frac{dl}{d\theta} \left(\operatorname{arctg} \frac{r}{r'} + k\pi \right) = l$$

但是

$$l = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{1^2 + r'^2} d\theta, \quad \frac{dl}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

代入上式得

$$\sqrt{r^2 + r'^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{r}{r'} + k\pi \right) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

对 θ 求导得

$$\frac{r'(r + r'^1)}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{r}{r'} + k\pi \right) + \frac{r^2 - rr'^1}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

整理为:

$$(r'^1 + r) \left(\frac{r}{r'} - \operatorname{arctg} \frac{r}{r'} - k\pi \right) = 0$$

分解为两个微分方程

$$\begin{cases} r'' + r = 0 \\ \frac{r}{r'} - \operatorname{arctg} \frac{r}{r'} - k\pi = 0 \end{cases}$$

由第一个方程解得:

$$r = 2R \cos(\theta - \varphi)$$

这是过原点的任意圆的方程。

第二个方程可以化为

$$\frac{r}{r'} - \operatorname{tg} \frac{r}{r'} = 0$$

\therefore

$$\frac{r}{r'} = c_n$$

$$(n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

其中 c_n 是一个常数, 是函数方程

$$x - \operatorname{tg} x = 0$$

的解, 如图 5 所示, 各 c_n 值是曲线 $y = \operatorname{tg} x$ 与直线 $y = x$ 的各交点的横坐标。

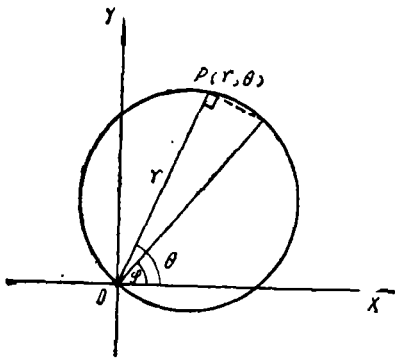


图 4

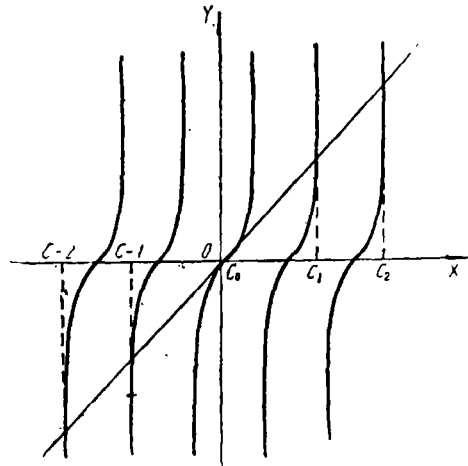


图 5

当 $n = 0$ 时

$$\frac{r}{r'} = c_0 = 0$$

即

$$r \frac{d\theta}{dr} = 0$$

\therefore

$$\frac{d\theta}{dr} = 0$$

所以偏角 $\theta = \theta_0$ 为任意常数, 这是过原点的任意直线方程。当 $n \neq 0$ 时

$$\frac{r}{r_1} = c_n \neq 0$$

解出曲线是以原点为极限点的等角螺线方程, 图 6

$$r = r_0 e^{\frac{\theta}{c_n}} \quad (11)$$

综合上述, “曲线是直线、圆、等角螺线 (11) (且 c_n 满足函数方程 $x - \operatorname{tg} x = 0$)” 是 (9) 式成立的必要条件, 但我们证明中的推导过程均是可逆的, 故此条件也是公式 (9) 成立的充分条件, 证出

现举一例说明在由缓和曲线与圆曲线组成的组合曲线上, 利用公式 (3)、(4) 计算既有渐伸线长度 E 或偏角 θ 均出现很大的偏差。

3. 例: 图 7 中, 缓和曲线长度 $l_0 = \widehat{OA} = 100$ 米。曲线半径 $R = 300$ 米, 圆曲线段 \widehat{AB} 所对的圆心角为 90° , (即 $l_y = 300 \times \frac{\pi}{2} = 471.239$ 米), 在直缓点 O 上置镜观测角 $\theta = \angle XOB$, 试求出 B 点处的渐伸线长度 E 和偏角 θ 的正确值, 再以公式 $E_{\text{角}} = l\theta$ 和 $\theta_{\text{角}} = \frac{E}{l}$ 分别求出 $E_{\text{角}}$ 和 $\theta_{\text{角}}$ 及它们偏离正确值 E 和 θ 的误差。

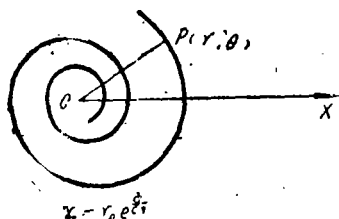


图 6

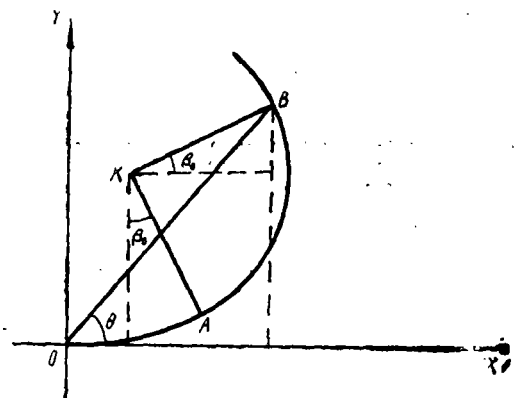


图 7

$$\beta_0 = \frac{l_0}{2R} = \frac{1}{6} \text{ rad}$$

$$L = l_0 + l_y = 571.239 \text{ 米}$$

由公式 (2) 算得

$$\begin{aligned} E &= \frac{l_0^2}{24R} + \frac{\left(l - \frac{l_0}{2}\right)^2}{2R} = 454.206 \text{ 米} \\ \theta &= \arctg \frac{\Delta y}{\Delta x} = \arctg \frac{P + R(1 + \sin \beta_0)}{m + R \cos \beta_0} \\ &= \arctg \frac{\frac{l_0^2}{24R} + R\left(1 + \sin \frac{1}{6} \text{ rad}\right)}{\left(\frac{l_0}{2} - \frac{l^3}{240R^2}\right) + R \cos \frac{1}{6} \text{ rad}} \\ &= 0.793088117 \text{ rad} = 45^\circ 26' 26'' \\ E_{\text{角}} &= L\theta = 453.043 \text{ 米} \\ \theta_{\text{角}} &= \frac{E}{L} = 0.7951236137 \text{ rad} = 45^\circ 33' 26'' \end{aligned}$$

两个误差分别为

$$\delta_E = |E_{\text{角}} - E| = 1.163 \text{ 米}$$

$$\delta_\theta = |\theta_{\text{角}} - \theta| = 0^\circ 07' 00'' = 420''$$

显然此两个误差均异常地大, 大到任何规范也不容许的程度。

四、结 论

由于从 (9) 式可以推得 (3)、(4)、(8) 式。故置镜点是第一个置镜点或转点时, 上述定理均适用。因此使用角图法计算曲线但用偏角法测角时, 如有下两个注意点:

1. 只有保证在曲线的所有节点 (是指单圆曲线的直圆点、圆直点, 复曲线的圆、圆₂点以及一般曲线的直缓点、缓圆点、圆缓点、缓直点等。) 上均置镜测角, 但直线上及缓和曲线上及缓和曲线内部一定不置镜的情况下, (圆曲线内部各点置镜与否无妨), 或者说只有在不跨越任何节点置镜测角且在直线和缓和曲线内部不设置镜点的条件下, 所测算出的既有渐伸线长度的精度才可靠, 在其他情况下所算出的既有渐伸线长及拨量均会出现很大的偏差。

2. 对于变动很大的旧线, 已无法确定各节点的位置, 或圆曲线变动过大, 已不成为圆曲线, 使用偏角法测算既有渐伸线长度时均会产生较大的偏差。显然由公式 (4) 计算偏角也会产生很大的偏差; 再者旧线较原设计曲线必竟有所变动, 因此在任何情况下利用公式 (4) 计算既有线上的偏角均会产生误差, 它是一个不精确的公式。

参 考 文 献

[1] 汤曙曦: 铁路曲线渐伸线和偏角的相互关系及其计算方法

长沙铁道学院学报 1979年第二期

[2] 上海铁路局工务电务组编: 角图法校正曲线

人民铁道出版社 1975年

[8] 石伦侠: 利用拉格朗日展开公式求缓和曲线各元素的公式

长沙铁道学院学报 1984年第二期