

缓和曲线通论

同济大学 马地泰

一、引言

缓和曲线是用来连接直线和圆曲线、连接两不同半径的同向圆曲线以及连接两反向圆曲线的变曲率曲线,其曲率,在其两端各等于0和圆曲线的曲率或一圆曲线的曲率和另一圆曲线的曲率,而在其间接一定规律逐渐增大或减小。缓和曲线的曲率 k 沿其长度 l 的变动图线,或成直线形,或成曲线形。曲线形图线,在其两端各与水平线相切,其斜率 $\frac{dk}{dl}$ 的数值,在缓和曲线始点处为0,按一定规律逐渐增大(就其绝对值言),至缓和曲线中点达最大值,然后按与增大相同的规律逐渐减小,至缓和曲线终点又等于0,曲率 k 成为极对称于其中点的S形曲线。凡曲率变动图线成这样曲线的缓和曲线可统称为中心对称缓和曲线。曲率变动图线成直线的缓和曲线也属中心对称缓和曲线。缓和曲线的类型很多,但一切中心对称缓和曲线,不论是何类型,都有共同特点。分别论述于下。

二、连接直线和圆曲线的缓和曲线

图1a中,设缓和曲线AGB的曲率变动函数式为

$$k = f_k(l) \quad (1)$$

则缓和曲线的中心角(倾斜角) φ 和曲线上任意点的坐标 (x, y) 各为

$$\varphi = \int k dl = f_\varphi(l), \quad (2)$$

$$x = \int \cos \varphi dl = l - \int \left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \dots \right) dl = f_x(l) \approx l, \quad (3)$$

$$y = \int \sin \varphi dl = \int \varphi dl - \int \left(\frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^5}{5!} + \dots \right) dl = f_y(l) \approx \int \varphi dl. \quad (4)$$

由于设置缓和曲线,圆曲线向其中心的内移距 p 和曲线起点的后退距 q 各为

$$p = Y - R(1 - \cos \phi) \approx Y - \frac{L^2}{8R}, \quad (5)$$

$$q = X - R \sin \phi \approx \frac{1}{2}L. \quad (6)$$

缓和曲线的总中心角 $\phi = \frac{L}{2R}$,见后式(8)。

因缓和曲线的 k 曲线(图1b)极对称于其中点 M , $QH = KP = k_l$,所以

$$k_{(L-l)} = \frac{1}{R} - k_l. \quad (7)$$

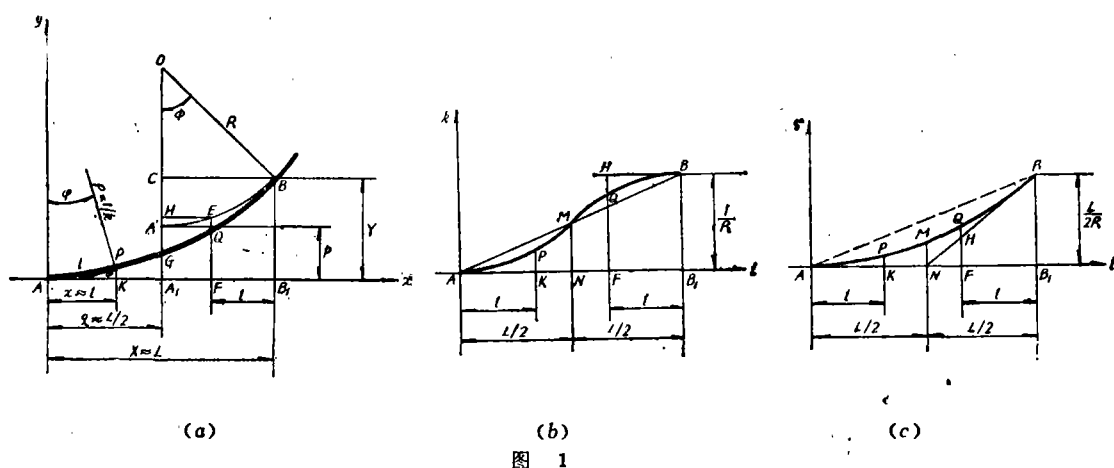


图 1

由 $\varphi = \int k dl$, 图1b中的面积 $APMQBB_1$ 等于缓和曲线的总中心角 ϕ 。由于 k 曲线极对称于其中点, 该面积等于三角形 ABB_1 的面积。于是得

$$\phi = \frac{L}{2R} \text{ (弧度)}. \quad (8)$$

又面积 $AKP = \varphi_l$, 面积 $APMQF = APMQBB_1 - FHBB_1 + BHQ = \frac{L}{2R} - \frac{l}{R} + BHQ = \varphi_{(L-l)}$ 。因 k 曲线极对称于其中点, 面积 $BHQ = AKP$, 所以

$$\varphi_{(L-l)} = \frac{L}{2R} - \frac{l}{R} + \varphi_l. \quad (9)$$

缓和曲线 AGB 的 φ 曲线如图1c中的 $APMQB$, 有五点特点: (1) 在其始点 A , 与横轴相切。(2) 在其终点 B , 与直线 NB 相切。因在缓和曲线终点, $\frac{d\varphi}{dl} = k = \frac{1}{R}$, NB 的斜率为 $\frac{1}{R}$ 。(3) 在其中点 M , 与直线 AB 的平行线相切。因在缓和曲线中点, $\frac{d\varphi}{dl} = k = \frac{1}{2R}$, 直线 AB 的斜率为 $\frac{1}{2R}$ 。(4) $HQ = KP$ 。因 $\varphi_l = KP$, $\varphi_{(L-l)} = FQ = FH + HQ$, 而 $FH = \left(\frac{L}{2} - l\right) \frac{1}{R}$, 故 $HQ = \varphi_{(L-l)} - \frac{2}{2R} + \frac{l}{R} = \varphi_l = KP$ 。(5) 因 $HQ = KP$ 这个关系适合于 l 的 $0 \sim \frac{L}{2}$ 的任何数值, 所以面积 $AKP = BHQ$, 面积 $APMN = BQMN$ 。

由近似式 $y \approx \int \varphi dl$, 图1c中, 面积 $APMQBB_1 \approx Y$, 面积 $AKP \approx y_l$, 面积 $APMQF \approx APMQBB_1 - FHBB_1 - BHQ \approx y_{(L-l)}$ 。因面积 $BHQ = AKP$, 梯形 $FHBB_1$ 面积 $= \frac{l(L-l)}{2R}$, 所以

$$y_{(L-l)} \approx Y - \frac{l(L-l)}{2R} - y_l. \quad (10)$$

因 $q \approx \frac{L}{2}$, 图1a中的 G 点为缓和曲线的近似中点,

$$y_G \approx y_{L/2} \approx \frac{1}{2} \left(Y - \frac{L^2}{8R} \right) \approx \frac{1}{2} p.$$

可见 G 点亦为 A_1A' 的近似中点; 缓和曲线与圆曲线内移距近于互相平分。

图1a中, $y_{(L-l)} = FQ = A_1C - (A'C - A'H) - QE$, $A_1C = Y$, $A'C \approx \frac{L^2}{8R}$, $A'H \approx \left(\frac{L}{2} - l\right)^2 / 2R$. 于是得 $y_{(L-l)} \approx Y - \frac{l(L-l)}{2R} - QE$. 与式(10)比较, 可知 $QE \approx y_i = KP$. 这个关系适合于 l 的 $0 \sim \frac{L}{2}$ 的任何数值, 所以图1a中的面积 AA_1G 与面积 BA_1G 近于相等。

缓和曲线的计算和测设, 一般用近似式

$$x \approx l, \quad y = \int \varphi dl = F(x), \quad q \approx \frac{L}{2}, \quad p \approx Y - \frac{L^2}{2R}.$$

这就是认为 $\frac{dy}{dl} \approx \frac{dy}{dx} = \tan \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi$, $\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{d\varphi}{dl} = k$. 用近似式计算测设的缓和曲线, 其在终点的曲率半径 R_s 大于其所连接的圆曲线的半径 R , 其终点的纵坐标 Y_s 小于圆曲线的纵坐标 Y_c , 其总中心角 ϕ_s 小于其所取代的圆弧的中心角 ϕ_c 也小于理论值 $\phi = \frac{L}{2R}$. 所以, 在

缓和曲线终点, 缓和曲线的切线与圆弧的切线不相重合, 也不相平行, 缓和曲线不能与圆曲线圆顺地连接(图1d)。

用近似式 $y = F(x)$ 表示的缓和曲线的曲率准确值为

$$k = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

由近似关系, 在缓和曲线终点, $\frac{dy}{dx} = \frac{L}{2R}$,

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R}$. 代入上式, 得缓和曲线在其终点的曲率半径 R_s 为

$$R_s = R \left(1 + \frac{3L^2}{8R^2} + \frac{3L^4}{128R^4} - \frac{L^6}{1024R^6} + \dots \right) > R.$$

$$R_s - R = \frac{3L^2}{8R} \left(1 + \frac{L^2}{16R^2} - \dots \right). \quad (A)$$

缓和曲线在其终点的倾斜角 ϕ 应等于 $\frac{L}{2R}$, 但其实际值 ϕ_s 为

$$\phi_s = \arctg \frac{L}{2R} = \frac{L}{2R} - \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2R} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{L}{2R} \right)^5 - \dots < \phi.$$

$$\phi - \phi_s = \frac{L^3}{8R^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{L^2}{20R^2} + \dots \right). \quad (B)$$

被缓和曲线所取代的圆弧的中心角 ϕ_c 为

$$\phi_c = \arctg \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \arctg \frac{L}{2R} \left[1 - \left(\frac{1}{2R} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

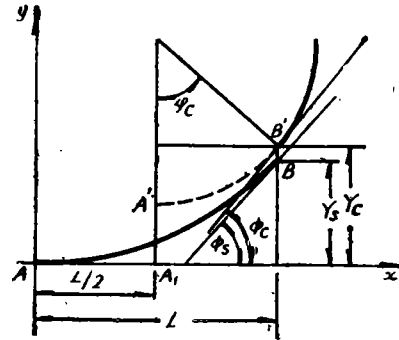


图 1d

$$= \frac{L}{2R} + \frac{L^3}{48R^3} + \frac{3L^5}{1280R^5} + \dots > \phi_0.$$

$$\Phi_c - \Phi_s = \frac{L^3}{16R^3} \left(1 - \frac{L^2}{16R^2} + \dots \right). \quad (C)$$

由式(3)和(4), 可见缓和曲线终点坐标的近似值 X_s 和 Y_s 大于其准确值 X 和 Y 。

$$\left. \begin{aligned} X_s - X &= \int_0^L \left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \dots \right) dl, \\ Y_s - Y &= \int_0^L \left(\frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^5}{5!} + \dots \right) dl. \end{aligned} \right\} \quad (D)$$

图1d中

$$Y_c = p + \left[R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \right] = Y_s - \frac{L^2}{8R} + \left[R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \right],$$

$$Y_c - Y_s = \frac{L^4}{128R^3} \left(1 + \frac{L^2}{8R^2} - \dots \right). \quad (E)$$

由式(A),(B),(C),(D),(E)计算所得的误差, 虽有的数值不大, 但结合在一起, 不可不考虑其影响。

三、连接两不同半径的同向圆曲线的缓和曲线

设缓和曲线所取代的两圆弧的半径和中心角各为 R_2 、 α_2 和 R_1 、 α_1 。缓和曲线的总中心角 $\phi = \alpha_2 + \alpha_1 = \frac{L(R_1 + R_2)}{2R_1R_2}$ 见后式(15)。如设为缓和曲线长度 L 等于其所取代的两圆弧的长度之和, 即

$$R_2\alpha_2 + R_1\alpha_1 = R_2\alpha_2 + R_1(\phi - \alpha_2) \approx L = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}\phi,$$

可解得 $\alpha_2 \approx \frac{R_1}{R_1 + R_2}\phi$ 同样, $\alpha_1 \approx \frac{R_2}{R_1 + R_2}\phi$ 由此

$$R_2\alpha_2 \approx R_1\alpha_1 \approx \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\phi = \frac{1}{2}L \quad (11)$$

I、先以缓和曲线的曲率半径为 R_2 的一端作为曲线始点和坐标原点(图2a)。由于设置缓和曲线 EGB , EM 和 BN 两圆弧的错开距

$$p = MN = \frac{Vu}{\cos\alpha_2}$$

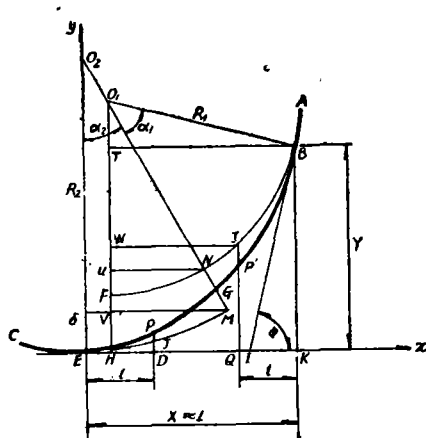
而 $Vu = HT - HV - (FT - Fu) = Y - R_2(1 - \cos\alpha_2) - R_1[(1 - \cos\phi) - (1 - \cos\alpha_2)]$ 。

所以

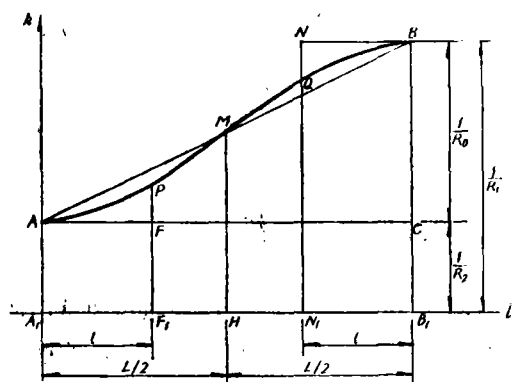
$$p = \frac{Y - (R_2 - R_1)(1 - \cos\alpha_2) - R_1(1 - \cos\phi)}{\cos\alpha_2} \quad (12)$$

使分子中的 $(1 - \cos\alpha_2) \approx \frac{L^2}{8R_2^2}$, $(1 - \cos\phi) \approx \frac{L^2(R_1 + R_2)^2}{8R_1^2R_2^2}$, 并使分母中的 $\cos\alpha_2 \approx 1$, 得近似式

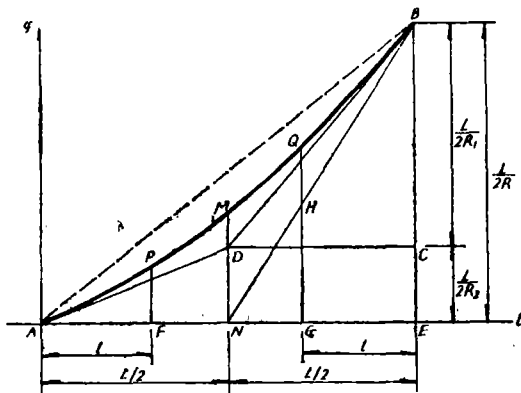
$$p \approx Y - \frac{L^2}{8R_1R_2}(R_2 + 3R_1). \quad (13)$$



2a,



2b,



2c

图 2

因缓和曲线 EGB 的 k 曲线(图2b)极对称于其中点 $FP=QN$ 。而图中

$$k_1 = \frac{1}{R_2} + FP, \quad k_{(L-1)} = \frac{1}{R_1} - QN。$$

于是 $k_{(L-1)} = \frac{1}{R} - k_1, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}。$ (14)

由 $\varphi = \int k dl$, 图2b中的面积 $A_1 APMQBB_1$ 等于缓和曲线的总中心角 ϕ , 该面积等于梯形 $A_1 ABB_1$ 的面积。所以

$$\phi = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{L}{2R}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}。 \quad (15)$$

又面积 $A_1 A P F_1 = \frac{l}{R_2} + A F P = \varphi_1$, 面积 $A_1 A P Q N_1 = \phi - \frac{l}{R_1} + B N Q = \varphi_{(L-1)}$ 。因面积 $A F P = B N Q$, 所以

$$\varphi_{(L-1)} = \frac{L}{2R} - \frac{l}{R} + \varphi_1, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}。 \quad (16)$$

缓和曲线 EGB 的 φ 曲线如图2c, 也有五点特点: (1)在其始点与直线 AD 相切。(2)在

其终点与直线 DB 相切。(3)在其中点与直线 AB 的平行线相切。(4) $HQ=FP=\varphi_l$, 因 $HQ=GQ-GH=\varphi_{(L-l)}-\left(\frac{L}{2}-l\right)\frac{1}{R}=\varphi_l$ 。(5) $HQ=FP$ 这个关系适合于 l 的 $0\sim\frac{L}{2}$ 的任何数值, 所以面积 $AFP=BHQ$, 面积 $APMN=BQMN$ 。

由 $y\approx\int\varphi al$, 图2c中, 面积 $AFP\approx y_l$, 面积 $APMQBE\approx Y$, 面积 $APMQG=APMQBE-GHBE-BHQ=y_{(L-l)}$ 。因梯形面积 $GHBE=\frac{l(L-l)}{2R}$, 所以

$$y_{(L-l)}\approx Y-\frac{l(L-l)}{2R}-y_l, \quad \frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}. \quad (17)$$

由式(11), 知图2a中的 G 为缓和曲线的近似中点, $y_G\approx y_{L/2}\approx\frac{1}{2}\left(Y-\frac{L^2}{8R}\right)$, 而 $y_M\approx\frac{L^2}{8R_2}$, 则

$$MG\approx y_G-y_M\approx\frac{1}{2}\left[Y-\frac{L^2}{8R_1R_2}(R_2+3R_1)\right]\approx\frac{1}{2}p.$$

可见缓和曲线 EGB 与圆弧错开距 MN 近于互相平分。

$$\text{图2a中, } JP=DP-DJ\approx y_l-\frac{l^2}{2R_2}, \quad (a)$$

$$P'J'=Q'J'-QP'=(HT-FT+FW)-y_{(L-l)}. \quad (b)$$

式(b)中的 $HT=Y$, $FT=R_1(1-\cos\phi)\approx\frac{L^2(R_1+R_2)^2}{8R_1R_2^2}$, $FW\approx\frac{(WJ')^2}{2R_1}$ 。因 $WJ'=(L-l)-(R_2-R_1)\sin\alpha_2\approx\frac{L(R_1+R_2)}{2R_2}-l$, 所以 $FW\approx\frac{1}{2R_1}\left[\frac{L^2(R_1+R_2)^2}{4R_2^2}-\frac{Ll(R_1+R_2)}{R_2}+l^2\right]$ 。代入式(b), 得

$$P'J'\approx Y-\frac{Ll(R_1+R_2)}{2R_1R_2}+\frac{l^2}{2R_1}-y_{(L-l)}\approx y_l-\frac{l^2}{2R_2}.$$

与式(a)比较, 得 $P'J'=JP$ 。这关系适合于 l 的 $0\sim\frac{L}{2}$ 的任何数值。可见图2a中的面积 EGM 与 BGN 近于相等。

图2b中, 曲线 $APMQB$ 原为连接半径 R_2 和 R_1 两同向圆曲线的缓和曲线的曲率变动图线, 如以 AC 为横轴, 便成为连接直线和半径 $R_0=\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$ 圆曲线的缓和曲线的曲率变动图线。该缓和曲线的曲率 k_0 与原缓和曲线的曲率 k 的关系是 $k_0=k-\frac{1}{R_2}$ 。从而 $\varphi_0=\varphi-\frac{l}{R_2}$, $y_0\approx y-\frac{l^2}{2R_2}$ 或 $y\approx\frac{l^2}{2R_2}+g_0$ 。 y 即图2a中 p 点的纵坐标 DP , $\frac{l^2}{2R_2}$ 为 J 点的纵坐标(近似值) DJ , 则 $JP\approx y_0$ 。再设偏角 $IEP=\delta$, 则 $\text{tg}\delta=\frac{y}{x}\approx\frac{y}{l}$, $\delta=\text{tg}\delta-\frac{1}{3}\text{tg}^3\delta+\frac{1}{5}\text{tg}^5\delta-\dots\approx\text{tg}\delta\approx\frac{l}{2R_2}+\frac{y_0}{l}$ 。即偏角 IEJ , 则角 $JEP=\frac{y_0}{l}\approx\delta_0$ 。故如把圆弧 EM 和缓和曲线 EGB 设想为具有弹性的弧线, 把两者一起弯曲至圆弧 EM 成与 EK 重合的直线, EGB 便成为连接直线和半径 $R_0=\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$ 的缓和曲线。

II、再以缓和曲线的曲率半径为 R_1 的另一端作为曲线始点和坐标原点(图3a)。则两圆弧错开距的计算式为

$$p=MN=\frac{VW}{\cos\alpha_1}=\frac{BW-BV}{\cos\alpha_1}.$$

其中, $BW = R_1(1 - \cos \alpha_1)$, $BV = HT = HS - (FS - FT) = Y_1 - R_2[(1 - \cos \phi - (1 - \cos \alpha_1))]$ 。由此

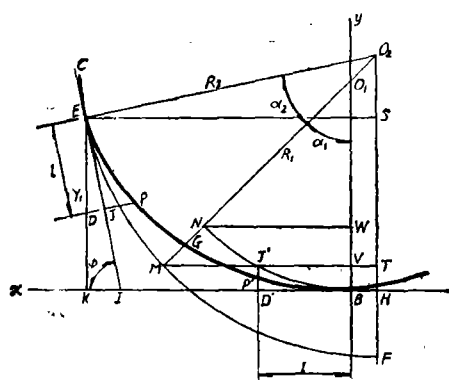
$$p = \frac{R_2(1 - \cos \phi) - (R_2 - R_1)(1 - \cos \alpha_1) - Y_1}{\cos \alpha_1}, \quad (12a)$$

$$\approx \frac{L^2}{8R_1R_2}(R_1 + 3R_2) - Y_{10}. \quad (13a)$$

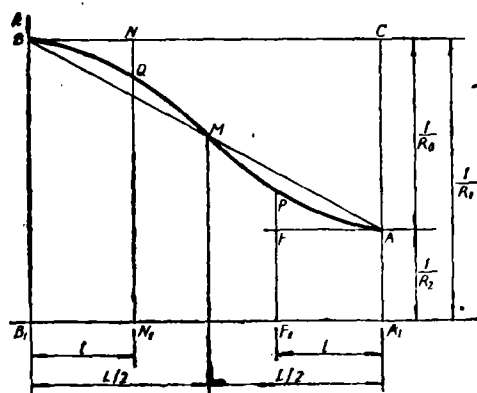
Y_1 为E点的纵坐标KE, 不同于图2a中B点的纵坐标Y。由式(13)和(13a)所得的p值, 理应相等。由此

$$Y + Y_1 \approx \frac{L^2}{2R_1R_2}(R_1 + R_2) = \frac{L^2}{2R}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (18)$$

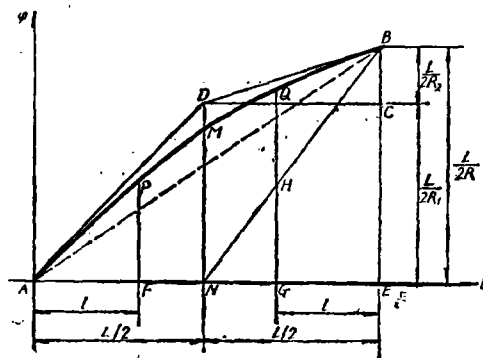
缓和曲线BGE的k曲线如图3b(照一般习惯, 把横轴的向左方向改为向右方向)。图中



3a,



3b,



3c

图 3

$$N_1Q = \frac{1}{R_1} - QN = kl, \quad F_1P = \frac{1}{R_2} + FP = k_{(L-l)}.$$

因 $QN = FP$, 所以

$$k_{(L-l)} = \frac{1}{R} - k_1, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}. \quad (14)$$

面积 $B_1BQN_1 = \frac{l}{R_1} - BNQ = \varphi_l$, 面积 $B_1BQMPPF_1 = \phi - \frac{l}{R_2} - AFP = \varphi_{(L-l)}$.

因面积 $AFP = BNQ$, 所以

$$\varphi_{(L-l)} = \frac{L}{2R} - \frac{l}{R} + \varphi_l, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}. \quad (16)$$

缓和曲线 BGE 的 φ 曲线如图 3c。曲线两端各与直线 AD 和 DB 相切, 在其中点与直线 AB 的平行线相切, $FP = HQ$, 面积 $AFP = BHQ$, 面积 $APMN = BQMN$ 。图中

$$\text{面积 } APMQG = APMQBE - GHBE - BHQ$$

$$\approx Y_1 - \frac{l(L-l)}{2R} - BHQ \approx y_{(L-l)}.$$

因面积 $BHQ = AFP \approx y_l$, 所以

$$y_{(L-l)} \approx Y_1 - \frac{l(L-l)}{2R} - y_l, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}. \quad (17)$$

把图 2c 颠倒, φ 曲线 $BQMPPA$ 便与图 3c 中的 $APMQB$ 完全相同。图 2c 中的面积 $APMQBE \approx Y$, 图 3c 中的面积 $APMQBE \approx Y_1$, 两者相加, 合成长方形面积 $\frac{L^2}{2R}$ 。

把图 2b 翻过, 便得图 3b。如用 k_1 代表图 3b 中的曲率, 用 k 代表图 2b 中的曲率, 则 $k_{11} = k_{(L-l)} = \frac{1}{R} - k_l$ 。由此, $\varphi_{11} = \frac{l}{R} - \varphi_l$, $y_{11} \approx \frac{l^2}{2R} - y_l$ 。亦可得 $y_{L/2} + y_{l/2} \approx \frac{L^2}{8R}$, $Y + Y_1 \approx \frac{L^2}{2R}$ 。

图 3b 中的曲线 $BQMPPA$ 原为连接半径 R_1 和 R_2 两圆曲线的缓和曲线的曲率变动图线, 如以 BC 为横轴, 便成为连接直线和曲率为 $\left(-\frac{1}{R_0}\right) = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$ 的圆曲线的缓和曲线的曲率变动图线。该缓和曲线的曲率 $(-k_0)$ 与原缓和曲线的曲率 k 的关系是 $-k_0 = k - \frac{1}{R_1}$ 。

$\left(-\frac{1}{R_0}\right)$ 和 $(-k_0)$ 表示其方向与半径 R_1 和 R_2 两圆弧的相反。如不考虑其方向, 该缓和曲线实无异于连接直线和半径 R_0 圆曲线的缓和曲线。由 $(-k_0) = k - \frac{1}{R_1}$, 得 $(-\varphi_0) = \varphi - \frac{l}{R_1}$, $(-y_0) \approx y - \frac{l^2}{2R_1}$ 或 $y \approx \frac{l^2}{2R_1} - y_0$ 。 y 即图 3a 中 P' 点的纵坐标 $D'P'$, $\frac{l^2}{2R_1}$ 为 J' 点的纵坐标 $D'J'$ 的近似值, 则 $P'J' \approx y_0$ 。再设偏角 $IBP' = \delta \approx \lg \delta \approx \frac{y}{l} \approx \frac{l}{2R_1} - \frac{y_0}{l}$, $\frac{l}{2R_1}$ 为偏角 IBJ' , 则角 $P'BJ' = \frac{y_0}{l} \approx \delta_0$ 。可见角 $P'BJ' =$ 角 JEP , 如果弧长 EP 、 EJ 、 BP' 、 BJ' 四者相等。

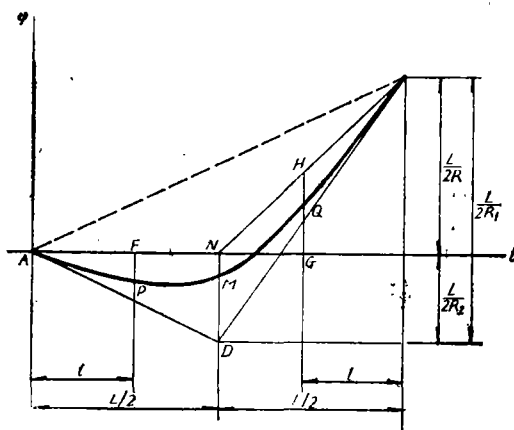
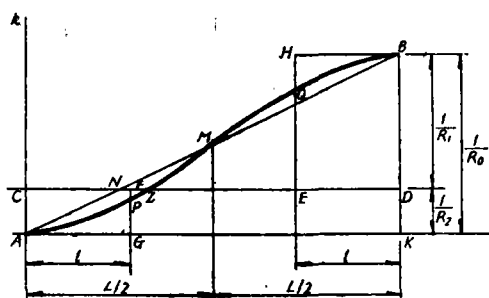
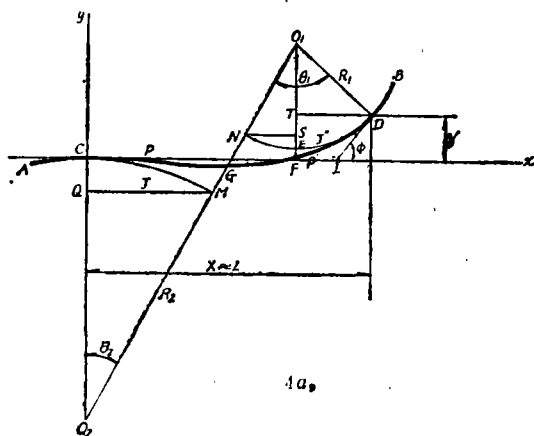
圆弧 CEM 和 ABN 实为缓和曲线 EGB 之在 E 点和 B 点的吻切圆, 故在 E 点, 可自切线 EI 方向以偏角 $\left(\frac{l}{2R_2} + \delta_0\right)$ 测设曲线 EGB , 在 B 点, 可自切线 BI 方向以偏角 $\left(\frac{l}{2R_1} - \delta_0\right)$ 测设曲线 BGE 。 δ_0 为在连接直线和半径 $R_0 = \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$ 圆曲线的缓和曲线的始点自该直线方向对向缓和曲线上相应点的偏角。

四、连接两反向圆曲线的缓和曲线

设缓和曲线所取代的两反向圆弧的半径和中心角各为 R_2 、 θ_2 和 R_1 、 θ_1 , $R_2 \geq R_1$ 。缓和曲线两端两切线的交角 $\phi = \theta_1 - \theta_2 = \frac{L(R_2 - R_1)}{2R_1R_2}$ 见后式 (23)。如果认为

$L = \frac{2R_1R_2}{R_2 - R_1}\phi \approx R_2\theta_2 + R_1\theta_1 = R_2\theta_2 + R_1(\phi + \theta_2)$, 则 $\theta_2 \approx \frac{R_1}{R_2 - R_1}\phi$, $\theta_1 \approx \frac{R_2}{R_2 - R_1}\phi$ 。由此

$$R_2\theta_2 \approx R_1\theta_1 \approx \frac{1}{2}L. \quad (19)$$



4b,

4c

图 4

I、图4a中,为了设置缓和曲线CGD,必须把CM和BN两圆弧错开。其错开距MN为

$$p = \frac{QC + FT - ET + ES}{\cos \theta_2}.$$

其中, $QC = R_2(1 - \cos \theta_2)$, $FT = Y$, $ET = R_1(1 - \cos \phi)$, $ES = R_1(1 - \cos \theta_2)$ 。于是得

$$p = \frac{Y + (R_2 + R_1)(1 - \cos \theta_2) - R_1(1 - \cos \phi)}{\cos \theta_2} \quad (20)$$

$$\approx Y - \frac{L^2}{8R_1R_2}(R_2 - 3R_1). \quad (21)$$

图4b示缓和曲线CGD的k曲线。图中

$$k_1 = FP = GP - \frac{1}{R_2}, \quad k_{(L-1)} = EQ = \frac{1}{R_1} - QH.$$

因 $GP = QH$, 所以

$$k_{(L-1)} = \frac{1}{R} - k_1, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}. \quad (22)$$

注意上式中的 k_1 或为正或为负。缓和曲线的 $k = 0$ 之点为缓和曲线的拐点(反曲点)。

图4b中, 面积 $ZMQBD$ 减去 $ZPAC$, 亦即等于面积 NBD 减去 NAC , 为缓和曲线之在 D 点的倾斜角 ϕ 。

$$\phi = \frac{L(R_1 - R_2)}{2R_1R_2} = \frac{L}{2R}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}. \quad (23)$$

在 $R_2 = R_1$ 的情况, $\phi = 0$, 曲线两端的两切线互相平切。又面积 $APFC = AGP - \frac{l}{R_2} = \varphi_1$, 面积 $ZMQE - ZPAC = \phi - \frac{l}{R_1} + BHQ = \varphi_{(L-1)}$ 。因 $BHQ = AGP$, 所以

$$\varphi_{(L-1)} = \frac{L}{2R} - \frac{l}{R} + \varphi_1, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}. \quad (24)$$

缓和曲线 CGD 的倾斜角 φ 曲线如图4c。(1) 曲线在其始点与直线 AD 相切。(2) 曲线在其终点与直线 DB 相切。(3) 曲线在其中点与直线 AB 的平行线相切。(4) $PF = QH$ 。因 $PF = -\varphi_1$, $QH = GH - GQ = \left(\frac{L}{2} - l\right)\frac{1}{R} - \varphi_{(L-1)} = -\varphi_1 = PF$ 。(5) 面积 $APF = BQH$, 面积 $APMN = BQMN$ (这里只考虑面积的绝对值)。

图4c中, 面积 $APF \approx -y_1$, 曲线 $APMQ$ 与横轴和纵线 GQ 所围成的面积(面积之在横轴以上的为正, 在横轴以下的为负, 这里指两者的代数和) $\approx y_{(L-1)}$, 曲线 $APMQB$ 与横轴和纵线 CB 所围成的面积(这里亦指正负面积的代数和) $\approx Y$ 。由图

$$y_{(L-1)} = Y - GHBC + BQH.$$

因梯形面积 $GHBC = \frac{l_{(L-1)}}{2R}$, 面积 $BQH = APF = -y_1$ (这里只考虑面积的绝对值), 所以

$$y_{(L-1)} \approx Y - \frac{l_{(L-1)}}{2R} - y_1, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}. \quad (25)$$

图4a中, $MG \approx QC + g_G$, $QC \approx \frac{L^2}{8R_2}$, $y_G \approx y_{L/2} \approx \frac{1}{2}\left(Y - \frac{L^2}{8R}\right)$ 。因而

$$MG \approx \frac{1}{2}\left[Y - \frac{L^2}{8R_1R_2}(R_2 - 3R_1)\right] \approx \frac{1}{2}p.$$

可见 G 点为缓和曲线的近似中点, 亦为 MN 的近似中点。

可以证明, 图4a中的面积 CGM 与 DGN 近于相等。

II、如以缓和曲线的曲率半径为 R_1 的另一端 D 作为曲线始点和坐标原点(图5a)。则两圆弧错开距的计算式为

$$p = \frac{FQ}{\cos \theta_1} = \frac{DQ - (DV - FV)}{\cos \theta_1}.$$

其中, $DQ = R_1(1 - \cos \theta)$, $DV = KC = Y_1$, $FV = ST = SW - TW = R_2(1 - \cos \theta_1) - R_2(1 - \cos \phi)$ 。

代入上式, 得

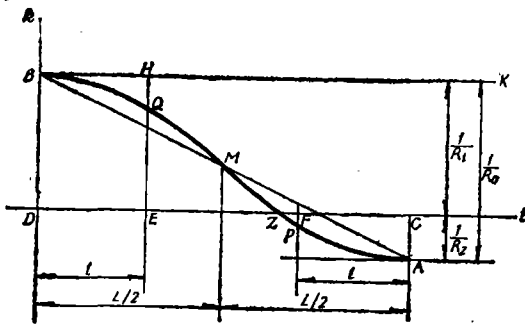
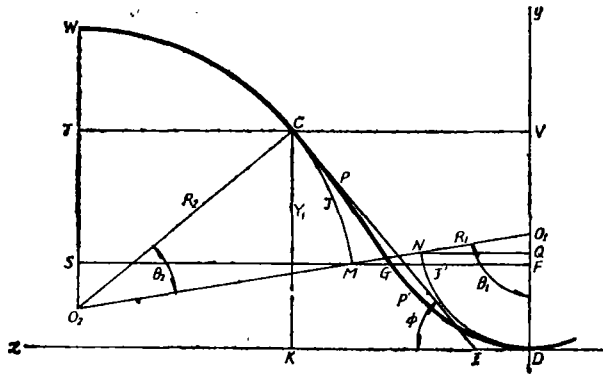
$$p = \frac{(R_1 + R_2)(1 - \cos \theta_1) - R_2(1 - \cos \phi) - Y_1}{\cos \theta_1} \quad (20a)$$

$$\approx \frac{L^2}{8R_1R_2}(3R_2 - R_1) - Y_{10} \quad (21a)$$

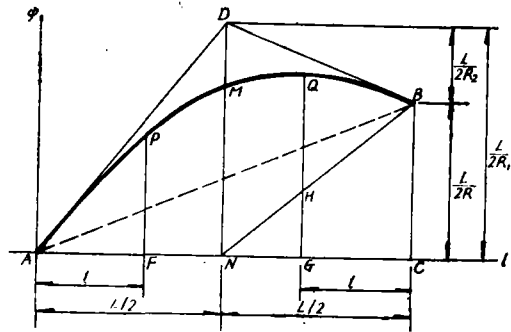
由式(21)和(21a)得

$$Y + Y_1 \approx \frac{L^2}{2R_1R_2}(R_2 - R_1) = \frac{L^2}{2R}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \quad (26)$$

缓和曲线DGC的k曲线如图5b。图中



5b,



5c

图 5

$$k_1 = EQ = \frac{1}{R_1} - QH, \quad k_{(L-l)} = FP = GP - \frac{1}{R_2}.$$

因HQ=GP, 所以

$$k_{(L-l)} = \frac{1}{R} - k_1, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}. \quad (22)$$

$$\text{又 面积 } DBQE = \frac{l}{R_1} - BHQ = \varphi_1,$$

$$\begin{aligned}
 \text{面积 } DBQMZ - ZPF &= DBQMZ - (ZPAC - FPA) \\
 &= (DBQMZ - ZPAC) + \left(\frac{l}{R_2} - PGA \right) \\
 &= \phi + \frac{l}{R_2} - PGA = \varphi_{(L-l)}.
 \end{aligned}$$

因面积 $PGA = BHQ = \frac{l}{R_1} - \varphi_l$, 所以

$$\varphi_{(L-l)} = \frac{L}{2R} - \frac{l}{R} + \varphi_l, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}. \quad (24)$$

缓和曲线 DGB 的 φ 曲线如图 5c。其在 A 点与直线 AD 相切, 在 B' 点与直线 DB 相切, 在 M 点与直线 AB 的平行线相切。图中, $FP = \varphi_l$, $GQ = GH + HQ = \frac{L}{2R} - \frac{l}{R} + HQ = \varphi_{(L-l)}$ 。由此, $HQ = FP$ 。因而面积 $AFP = BHQ$, 面积 $APMN = BQMN$ 。

因 $y \approx \int \varphi dl$, 面积 $APF \approx y_l$, 面积 $APMQG = APMQBC - GHBC - HQB \approx y_{(L-l)}$ 。

$$\text{得} \quad y_{(L-l)} \approx Y_1 - \frac{l(L-l)}{2R} - y_l, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}. \quad (25)$$

在连接反向曲线的缓和曲线中, 与连接同向曲线的缓和曲线一样, $k_{1l} = \frac{1}{R} - k_l$, $\varphi_{1l} = \frac{1}{R} - \varphi_l$, $y_{1l} \approx \frac{l^2}{2R} - y_l$, $y_{L/2} + y_{1L/2} \approx \frac{L^2}{8R}$, $Y + Y_1 \approx \frac{L^2}{2R}$, 但 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$ 。

图 4b 中, 如以 AK 为横轴, k 曲线 $APMQB$ 便成为连接直线和曲率 $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ 圆曲线的缓和曲线的 k_0 曲线。 $k_0 = k + \frac{1}{R_2}$ 。由此, $\varphi_0 = \varphi + \frac{l}{R_2}$, $y_0 \approx y + \frac{l^2}{2R_2}$ 或 $y \approx -\frac{l^2}{2R_2} + y_0$, $\delta \approx \frac{y}{l} \approx -\frac{l}{2R_2} + \delta_0$ 。 δ 即图 4a 中的偏角 ICP , $\frac{l}{2R_2}$ 为偏角 ICJ , 则角 $JCP = \delta_0$ 。图 5b 中, 如以 BK 为横轴, k 曲线 $BQMPA$ 便成为连接直线和曲率 $\left(-\frac{1}{R_0}\right) = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ 圆曲线的缓和曲线的 k_0 曲线。 $(-k_0) = k - \frac{1}{R_1}$ 。由此, $-\varphi_0 = \varphi - \frac{l}{R_1}$, $-y_0 \approx y - \frac{l^2}{2R_1}$ 或 $y \approx \frac{l^2}{2R_1} - y_0$, $\delta \approx \frac{l}{2R_1} - \delta_0$ 。 δ 即图 5a 中的偏角 IDP' , $\frac{l}{2R_1}$ 为偏角 IDJ' , 则角 $J'DP' \approx \delta_0$ 。故如弧长 $CP = CJ = DP' = DJ'$, 角 $JCP \approx$ 角 $J'DP'$, 等于在连接直线和半径 $R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ 圆曲线的缓和曲线的始点自该直线方向对向缓和曲线上相应点的偏角。

五、结 论

综上所述, 连接直线和半径 R 圆曲线、连接半径 R_2 和 R_1 两同向圆曲线 (令 $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$) 以及连接半径 R_2 和 R_1 两反向圆曲线 (设 $R_2 \geq R_1$ 并令 $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$) 的去度为 L 的缓和曲线, 不论是何类型, 都有下列共同特点:

1. 缓和曲线的总中心角或其两端两切线的交角 $\phi = \frac{L}{2R}$ 。
2. 缓和曲线的曲率符合条件 $k_{(L-l)} = \frac{1}{R} - k_l$ 。

3. 缓和曲线在其中点的曲率 $k_{L/2} = \frac{1}{2R}$ 。
4. 缓和曲线的中心角符合条件 $\varphi_{(L-l)} = \frac{L}{2R} - \frac{l}{R} + \varphi_l$ 。
5. 缓和曲线的纵坐标符合关系 $y_{(L-l)} \approx Y - \frac{l(L-l)}{2R} - y_l$ 。
6. 缓和曲线终点的纵坐标 Y 与其中点的纵坐标 $y_{L/2}$ 符合关系 $y_{L/2} \approx \frac{1}{2} \left(Y - \frac{L^2}{8R} \right)$ 。
7. 以缓和曲线的曲率半径为 R_2 的一端作为曲线始点和坐标原点时其曲率 k 、中心角 φ 、纵坐标 y 、中点的纵坐标 $y_{L/2}$ 和终点的纵坐标 Y 与以缓和曲线的曲率半径为 R_1 的另一端作为曲线始点和坐标原点时其曲率 k_1 、中心角 φ_1 、纵坐标 y_1 、中点的纵坐标 $y_{1L/2}$ 和终点的纵坐标 Y_1 的关系是： $k_{1l} = \frac{1}{R} - k_l$, $\varphi_{1l} = \frac{l}{R} - \varphi_l$, $y_{1l} \approx \frac{l^2}{2R} - y_l$, $y_{L/2} + y_{1L/2} \approx \frac{L^2}{8R}$, $Y + Y_1 \approx \frac{L^2}{2R}$ 。
8. 为了设置缓和曲线，圆曲线的内移距 $p \approx Y - \frac{L^2}{8R}$ 。
9. 为了设置缓和曲线，两同向和反向圆曲线的错开距各为 $p \approx \left[Y - \frac{L^2}{8R_1R_2} (R_2 \pm 3R_1) \right]$ 或 $\left[\frac{L^2}{8R_1R_2} (3R_2 \pm R_1) - Y_1 \right]$ 。
10. 缓和曲线的长度 L 与圆曲线的内移距或错开距 p 近于互相平分。
11. 第一半段缓和曲线与直线或圆弧和通过缓和曲线中点的纵线所围成的面积近似地等于第二半段缓和曲线与圆弧和通过缓和曲线中点的纵线所围成的面积。